Chapter-1 ફર્મેટનો સિદ્ધાંત અને તેના ઉપયોગો

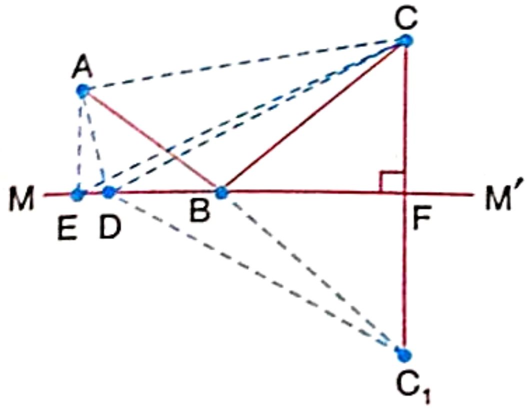
1. પરિચય

ફર્મેટનો સિદ્ધાંત એ પ્રકાશશાસ્ત્રમાં એક નોંધપાત્ર અને મહત્વપૂર્ણ સિદ્ધાંત છે, જે સમજાવે છે કે શા માટે પ્રકાશ સીધી રેખાઓ અને પ્રતિબિંબ(પરાવર્તન) અને રીફ્રેક્શન(વક્રીભવન)ના નિયમો સાથે ફેલાય છે. તે ભૌમિતિક ઓપ્ટિક્સનો આધાર બનાવે છે. તે એટલું કોમ્પ્યુટેશનલ(ગણતરીત્માક) ઉપકરણ નથી કારણ કે તે પ્રકાશના પ્રસાર વિશે વિચારવાની એક સંક્ષિપ્ત રીત છે. તે ફાળો આપતી મિકેનિઝમ્સ માટે કોઈ ચિંતા કર્યા વિના વસ્તુઓની ભવ્ય યોજના વિશેનું નિવેદન છે.

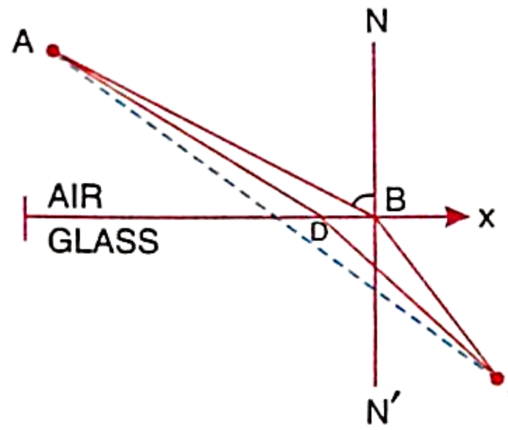
પાણીની સપાટી પર તૂટેલી પેન્સિલ રીફ્રેક્શન(વક્રીભવન)ની અસર

2.ફર્મેટનો ઓછામાં ઓછા સમય(ન્યૂનતમ સમય)નો સિદ્ધાંત:

એલેક્ઝાન્ડ્રિયાના હીરોએ ધારણા કરી કે પ્રતિબિંબિત પ્રકાશ ટૂંકા માર્ગે એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધી પ્રવાસ કરે છે. આકૃતિ 1 થી તે સ્પષ્ટ છે કે ABC, જે પ્રતિબિંબના નિયમોનું પાલન કરે છે, તે બિંદુ A થી C સુધીના અન્ય કોઈપણ કલ્પિત પાથ કરતા ટૂંકા છે, ઉદાહરણ તરીકે પથ$ADC. ABC$ ની લંબાઈ AC_1 રેખાની લંબાઈ જેટલી છે, જ્યારે ADC ની લંબાઈ વાસ્તવમાં તૂટેલી રેખા ADC_1 (C_1 બિંદુ C ની અરીસાની છબી છે) ની લંબાઈ જેટલી છે.



આકૃતિ 1



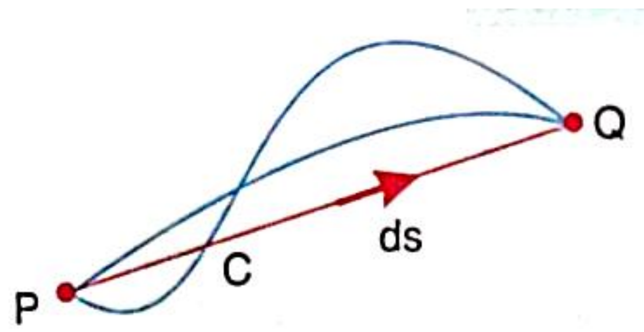
આકૃતિ 2

આકૃતિ 2 થી સ્પષ્ટ છે કે પ્રકાશનું વક્રીભવન ટૂંકા માર્ગના સિદ્ધાંતનું પાલન કરતું નથી. ABC, ADC વગેરે પથ AC કરતા લાંબા છે. આ હકીકતને સંપૂર્ણ રીતે ધ્યાનમાં લેતા, ફર્મેટે 1650માં સૂચન કર્યું કે સૌથી ટૂંકા માર્ગના સિદ્ધાંતને ઓછામાં ઓછા સમયના સિદ્ધાંત સાથે બદલવામાં આવે. ઓછામાં ઓછા સમયનો સિદ્ધાંત જણાવે છે કે.

" જ્યારે પ્રકાશ કિરણ બે બિંદુઓ P અને Q વચ્ચે પ્રવાસ કરે છે , ત્યારે તે તમામ સંભવિત માર્ગોમાંથી અનુસરે છે P થી Q, એક રસ્તો, જેમાં ઓછામાં ઓછો સમય જરૂરી છે."

Pierre de Fermat
(1601 – 1665)

ધારો કે P અને Q એ એક જ માધ્યમમાં બે બિંદુઓ (આકૃતિ 3) છે. પ્રકાશને માધ્યમમાં dL અંતરની મુસાફરી કરવા માટે સમય dt ની જરૂર છે.



આકૃતિ 3

$dt = \frac{dL}{v}$ ---------(1)

કુલ અંતર PQ ની મુસાફરી કરવા માટે જરૂરી સમય છે

$t = \int_P^Q \frac{dL}{v}$ ------------ (2)

$v = \frac{c}{\mu}$ તરીકે લઇ આપણે સમીકરણ (2) ને μ તરીકે ફરીથી લખતાં,

$t = \frac{1}{c}\int_P^Q \mu\, dL$ ---------- (3)

$\int_P^Q \mu\, dL$ એ પ્રકાશીય(ઓપ્ટિકલ) પથ લંબાઈ Δ છે.

જો આપણે P થી Q સુધીના વિવિધ માર્ગોને ધ્યાનમાં લઈએ , તો ફર્મટનો સિદ્ધાંત જણાવે છે કે

$\frac{dt}{ds} = 0$ -----------(4)

જ્યાં ds એ એક પરિમાણ છે જે કોઈપણ બે પથ વચ્ચેનો તફાવત અને આપેલ માર્ગોને સરખામણી હેઠળ વ્યક્ત કરે છે. સમીકરણ (3) ને તરીકે ફરીથી લખતાં

$t = \frac{\Delta}{c}$ -------- (5)

સમીકરણ (5), આડી રેખાનો સમય ઓપ્ટિકલ(પ્રકાશીય) પથની લંબાઈ Δ ના પ્રમાણસર છે. તેથી ફર્મેટના સિદ્ધાંતને નીચે પ્રમાણે પુનઃપ્રાપ્ત કરતાં:

પ્રકાશ લઘુત્તમ પથ લંબાઈ ધરાવતા પથ સાથે પ્રવાસ(પસાર) થાય છે.

આમ, હવે આ સ્થિતિને આ રીતે વ્યક્ત કરી શકાય

$\frac{d\Delta}{ds} = 0$ -------------(6)

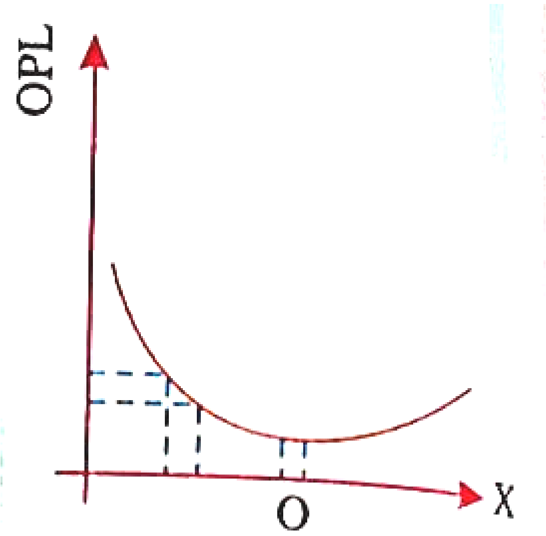
3.ફર્મેટનો એક્સ્ટ્રીમમ(અંતિમ) પથનો સિદ્ધાંત:

જાણવા મળ્યું છે કે એવા સંખ્યાબંધ કિસ્સાઓ છે જેમાં વાસ્તવિક પ્રકાશનો માર્ગ
એ છે કે જેના માટે ઓછામાં ઓછો નહીં પરંતુ મહત્તમ સમય લાગે છે. ઉદાહરણ તરીકે ગોળાકાર

પરાવર્તકના કિસ્સામાં, પ્રકાશ મહત્તમ સમય પસંદ કરે છે. બીજી તરફ, લંબગોળ પરાવર્તકમાં પ્રકાશ કિરણ તમામ માર્ગો માટે સમાન સમય લે છે. આ તથ્યોને ધ્યાનમાં રાખીને ફર્મેટના સિદ્ધાંતમાં ફેરફાર કરવાનો છે. તેના આધુનિક સ્વરૂપમાં સિદ્ધાંત જણાવે છે કે

"પ્રકાશ કિરણ એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધી જશે એવા પથને પાર કરો કે જેના માટે , બધા પડોશી પથની તુલનામાં, જરૂરી સમય ન્યૂનતમ અથવા મહત્તમ અથવા સ્થિર છે."

આને "ફર્મેટના એક્સ્ટ્રીમમ(અંતિમ) પથના સિદ્ધાંત" અથવા "સ્થિર સમયના ફર્મેટના સિદ્ધાંત તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.



આકૃતિ-4

સ્થિર મૂલ્ય નો અર્થ એવો થાય છે કે જેના માટે dL/dx મહત્તમ, અથવા ન્યૂનતમ અથવા આડી સ્પર્શક સાથે વળાંકનો બિંદુ ધરાવે છે. વળાંક OPL વિરુદ્ધ x ના આલેખમાં તેની આસપાસના વિસ્તારમાં થોડો વિસ્તારનો ઢાળ શૂન્ય હશે. શૂન્ય-સ્લોપ પોઇન્ટ લીધેલા પથને અનુરૂપ છે. OPL વળાંક વક્રીભવનના કિસ્સામાં આકૃતિના જેવો દેખાશે. અહીં OPL એ O ની નજીકમાં x માં નાનો ફેરફાર છે OPL પર થોડી અસર થાય છે, પરંતુ સમાન ફેરફાર O થી દૂર રહેવાથી OPL માં નોંધપાત્ર ફેરફાર થાય છે. પ્રકાશ એવો રસ્તો લે છે કે નજીકના અન્ય રસ્તાઓ જે લગભગ બરાબર એ જ સમય લે છે.

સીધી લીટીવાળુંપ્રચાર ,પ્રતિબિંબ અને વક્રીભવનના મૂળભૂતનિયમો ફર્મેટના મુખ્ય સિદ્ધાંતમાંથી મેળવી શકાય છે.

પ્રકાશનો સીધીલીટીમાં પ્રસાર

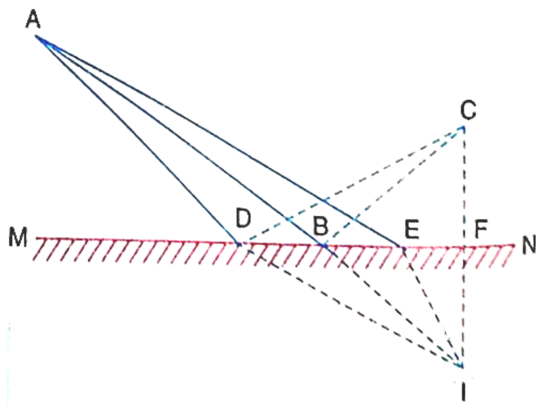
સીધી રેખા એ બે બિંદુઓ વચ્ચેના ટૂંકા અંતરનો માર્ગ છે. તેથી, સમરૂપ માધ્યમમાં કોઈ પણ માર્ગની સરખામણીમાં એક સીધી રેખા સાથે પ્રકાશના કિરણો દ્વારા લેવામાં આવેલો સમય ન્યૂનતમ છે. તે સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે પ્રકાશ કિરણો એકરૂપમાં મુસાફરી કરે છે ત્યારે રસ્તાઓ સીધી રેખાઓ હોય છે.

ઉલટાવી શકાય તેવું પ્રકાશના કિરણો

પ્રકાશીય પથ કે જે ન્યૂનતમ છે જ્યારે પ્રકાશ કિરણ બિંદુ P થી બિંદુ Q ન્યૂનતમ તરફ જાય છે જ્યારે કિરણ વિરુદ્ધ દિશામાં મુસાફરી કરે છે. તેથી, એક કિરણ જે Q થી મુસાફરી કરે છે તે Q થી P સુધીની વિરુદ્ધ દિશામાં સમાન માર્ગને આવરી લેશે. આમ, પ્રકાશની ઉલટાવી શકાય તેવું ફર્મેટના સિદ્ધાંતને અનુસરે છે.

4.પ્રતિબિંબ(પરાવર્તન)ના નિયમો

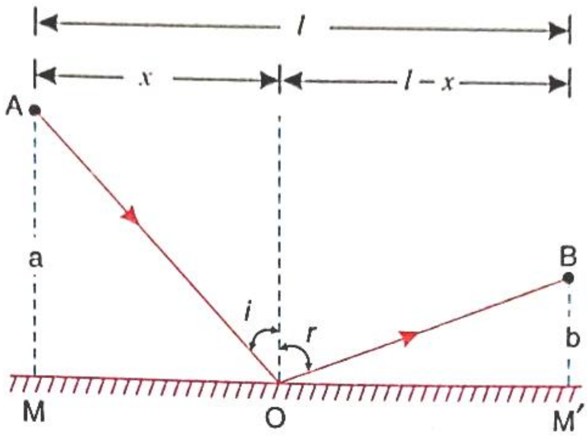
પ્રકાશ અરીસા MN પર અથડાયા પછી પ્રકાશ કિરણ A થી C તરફ જવા માટે જે રસ્તો લે છે તે શોધવાતાં જે સમય લાગે તે ન્યૂનતમ હોય.



આકૃતિ 5

એક રસ્તો એ છે કે પ્રકાશ ઝડપથી અરીસા પર જઇ અને પછી ADC માર્ગ સાથે C પર જાય છે. ADનો રસ્તો ટૂંકો હોવા છતાં , DC કરતાં લાંબો છે. માર્ગ શોધવા માટે, એક ભૌમિતિક યુક્તિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે જેના માટે સમય સૌથી ઓછો હશે , બિંદુ I અરીસાની પાછળ સ્થિત છે, જેમ કે $\Delta^{le}\ CDI$ માં, $\angle CFD = 90^0$ $CF = FI$ અને $DC = DI$. તેથી, અંતરનો સરવાળો $AD + DC$, જે પ્રકાશ માટે લેવાયેલા સમયના પ્રમાણસર છે ,તે $AD + DI$ બે લંબાઈનો સરવાળો પણ છે. પછી સમસ્યા એ રસ્તો શોધવામાં છે કે A માંથી કિરણ સૌથી ઓછા સમયમાં I તરફ જવા માટે લેછે.

શું તે ADI પથ છે? AD અને ID એ ત્રિકોણ AID ની બે બાજુઓ હોવાથી, તેમનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ AI ની લંબાઈ કરતા વધારે છે. તો જવાબ છે ના. કદાચ તે પથ AEI છે? બરાબર એ જ કારણોસર જવાબ ફરીથી ના છે: $AE + EI > AI$. આ રીતે આગળ વધતા આપણે એકમાત્ર સંભવિત જવાબ પર પહોંચીએ છીએ- કિરણ એ ABI પથ સાથે મુસાફરી કરવી જોઈએ કારણ કે આ સૌથી ટૂંકો રસ્તો છે. આનો અર્થ એ છે કે A થી C તરફ જતી વખતે, કિરણ B પર પ્રતિબિંબિત થાય છે.

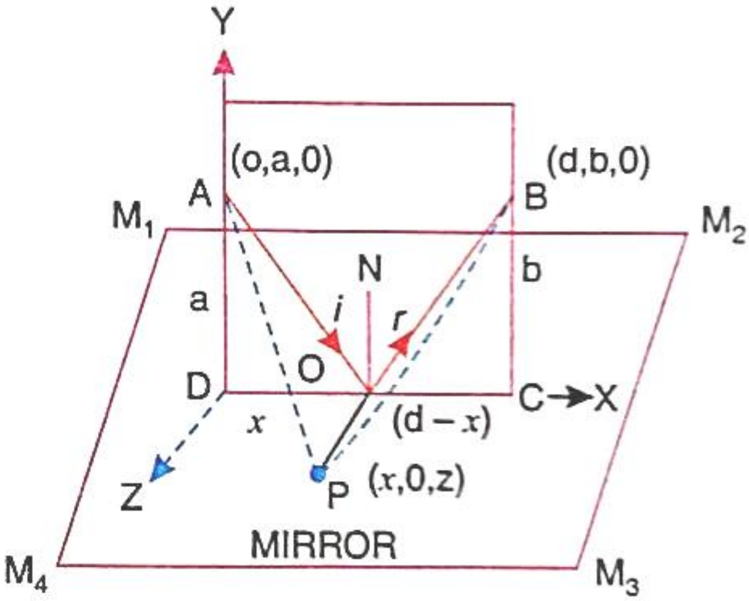


આકૃતિ 6

ધારોએ કે આકૃતિ 6 માં દર્શાવ્યા મુજબ A માંથી એક કિરણ B પર પ્રતિબિંબિત થાય તે પહેલા O પર અરીસા પર પડે છે, જેમ કે. મૂળભૂત પદ્ધતિ એ છે કે, પ્રથમ, x, I, a અને b ના સંદર્ભમાં કિરણ દ્વારા A થી B સુધીની મુસાફરી કરેલ L પાથની લંબાઈ માટે અભિવ્યક્તિ મેળવવાની છે. બીજું, બિંદુ O ની સ્થિતિ બદલીને L નાનું કરો. ત્રીજું, પરિણામી અભિવ્યક્તિમાં ખૂણા i અને r ને બદલો. ન્યૂનતમ પથ લંબાઈ હવે x ના સંદર્ભમાં L ને અલગ કરીને અને પરિણામી અભિવ્યક્તિને શૂન્ય સાથે સરખાવીને શોધી શકાય છે.

4.1 પ્રતિબિંબ(પરાવર્તન)નોપ્રથમનિયમ:

એક સમતલ અરીસો(પ્લેન મિરર)નો વિચાર કરો. A અને B એ અરીસાના સમતલથી ઉપરના બે બિંદુઓ છે અને અરીસાના સમતલથી સામાન્ય $ABCD$ સમતલમાં સ્થિત છે. બિંદુ A થી આવતો પ્રકાશ B તરફ પ્રતિબિંબિત થાય છે(આકૃતિ7).



આકૃતિ 7

ધારો કે પ્રકાશ કિરણ P બિંદુ પરથી પસાર થાય છે. તેનો અર્થ એ થાય છે કે પ્રકાશ એ AP સાથે ઘટના છે અને PB સાથે પ્રતિબિંબિત થાય છે. આમ, APB એ A થી B સુધીનો સૌથી સામાન્ય કલ્પી શકાય એવો રસ્તો છે.સમતલ અરીસો ABCD માટે નોર્મલ સમતલ $M_1M_2M_3M_4$ દોરો. કોઓર્ડિનેટ્સનું મૂળ D પર લો. DC અને DA ને x અને y અક્ષો બનવો. ચાલો $DA = a, CB = b$ અને $DC = d$. બિંદુ P સામાન્ય છે કોઓર્ડિનેટ્સ (x, o, z). હવે $AP + PB = L$, મળે છે.

$$L = [(x-0)^2 + (0-a)^2 + (z-0)^2]^{\frac{1}{2}} + [(x-d)^2 + (0-b)^2 + (z-0)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$or \quad L = \sqrt{x^2 + a^2 + z^2} + \sqrt{(x-d)^2 + b^2 + z^2} \text{ -----------(7)}$$

હવે વાસ્તવિક માર્ગ મેળવવા માટે ફર્મેટના સિદ્ધાંતને લાગુ કરીતાં. પથ APB ને x અને z દ્વારા અલગ અલગ કરી શકાય છે. અને L નું લઘુત્તમ મૂલ્ય મેળવીએ, જે z ના સંદર્ભ(સાપેક્ષ)માં L નું વ્યુત્પન્ન(વિકલન) લઈને અને શૂન્યની બરાબર વ્યુત્પન્ન સેટ કરીને સૌથી ટૂંકો ઓપ્ટિકલ પથ છે. આમ,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)_x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2+z^2}} \cdot 2z\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+b^2+z^2}} \cdot 2z\right] = 0$$

$$\therefore \quad z\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+b^2+z^2}}\right] = 0$$

જેમ કૌંસમાં પરિબળ શૂન્ય ન હોઈ શકે , z એ શૂન્યની બરાબર હોવું જોઈએ.

$$z = 0$$

ઉપરોક્ત પરિણામનો અર્થ એ છે કે P એ પ્લેન $ABCD$ માં હોવું જોઈએ, જે અરીસા માટે સામાન્ય છે, P માટે એવી સ્થિતિ છે. જો P એ O સાથે એકરુપ હોય, તો તે સ્પષ્ટ છે કે ઘટના કિરણ AO, ON પૃષ્ઠ સામાન્ય અને પ્રતિબિંબિત કિરણ OB એ જ સમતલમાં હોય. આ પ્રતિબિંબનો પ્રથમ નિયમ છે.

4.2 પ્રતિબિંબનો બીજો નિયમ:

$z = 0$ નો ઉપયોગ સમીકરણ(7)માં કરતાં નીચે મુજબ મળે છે.

$$L = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x-d)^2 + b^2} \text{ --------------(8)}$$

હવે x ની સાપેક્ષ L નું વિકલન કરતાં,

$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot 2x + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+b^2}} \cdot 2(x-d)$$

$\frac{dL}{dx} = 0$મૂકતાં મળે,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{(x-d)}{\sqrt{(x-d)^2+b^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{-(x-d)}{\sqrt{(x-d)^2+b^2}}$$

$$or \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{(d-x)}{\sqrt{(x-d)^2+b^2}}$$

હવે ત્રિકોણ AOD અને BOC ને વિચારતાં ,

$\sin i = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\sin r = \frac{(d-x)}{\sqrt{(x-d)^2+b^2}}$

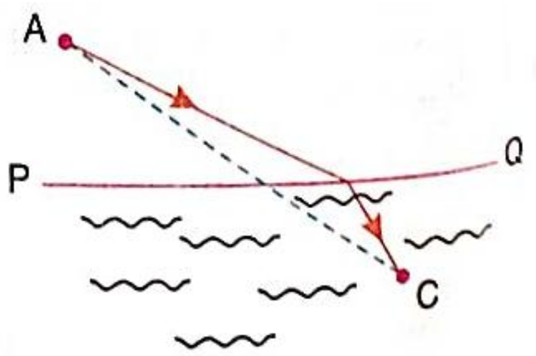
$\therefore \sin i = \sin r$

$\therefore i = r$ ------------------------(9)

આ પ્રતિબિંબનો બીજો નિયમ છે.

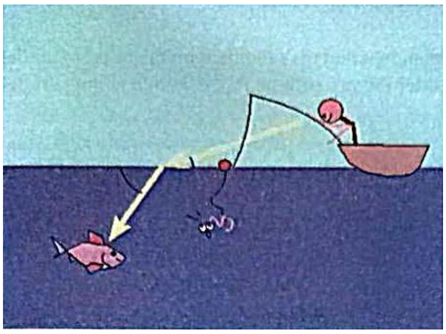
5. વક્રીભવનના નિયમો:

હવે વક્રીભવનની ઘટના માટે ફર્મેટનો સિદ્ધાંત લાગુ કરીએ. આપણી પાસે બે માધ્યમો વચ્ચે સીમા PQ છે. પ્રકાશ A થી C તરફ જાય છે. જો સીમાની બંને બાજુએ પ્રકાશની ગતિ સમાન હોત , તો A થી C સુધીનો માર્ગ એક સીધી રેખા હશે. PQ ની ઉપરની અને PQ ની નીચેની ઝડપ અલગ અલગ છે અને ધારીએ કે PQ ઉપરનું માધ્યમ હવા છે અને PQ ની નીચે પાણીનું માધ્યમ છે.

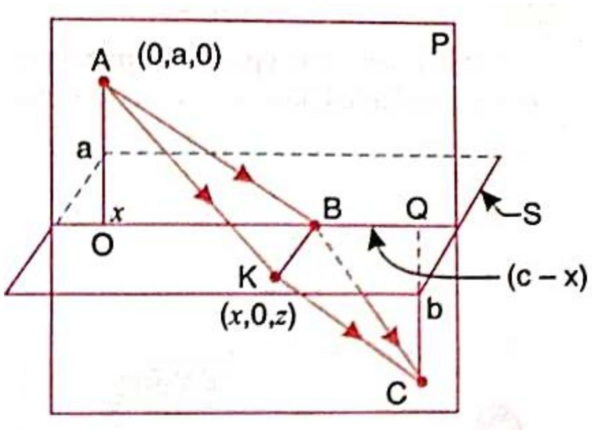


આકૃતિ 8

અહીં દર્શાવે છે કે કેવી રીતે માછલીમાંથી પ્રકાશ હવા-પાણીના ઇન્ટરફેસ દ્વારા માછીમારને વહન કરવામાંઆવેછે.



ફેનમેને તેમના પુસ્તકમાં,એક યોગ્ય સામ્યતા આપી છે જે અહીં લખતાં. "એ સમજાવવા માટે કે સૌથી સારી બાબત એ છે કે માત્ર સીધી લીટીમાં જવાનું નથી , હવે કલ્પના કરો કે એક સુંદર છોકરી બોટમાંથી પડી છે , અને તે પોઈન્ટ C પર પાણીમાં મદદ માટે ચીસો પાડી રહી છે. આપણે પોઈન્ટ A જમીન પર છીએ. આપણે દોડી શકીએ છીએ અને તરી શકીએ છીએ. પાણીમાં અંતર ઘટાડવા માટે જમીન પર વધુ અંતરની મુસાફરી કરવી ફાયદાકારક છે, કારણ કે આપણે પાણીમાં ખૂબ ધીમા જઈએ છીએ."



આકૃતિ 9

બે માધ્યમોને અલગ કરતી સમતલ સપાટી S ને ધ્યાનમાં લો. A અને C એ બે વિવિધ માધ્યમો માંઆવેલા બે બિંદુઓ છે.આપણે A થી C સુધીનો રસ્તો શોધવો જોઈએ , જે પ્રકાશથી વધુ ઝડપથી આવરી શકાય છે.કોઈપણ અન્ય કાલ્પનિક માર્ગને આવરી લે છે. સ્પષ્ટપણે, પથમાં બે સીધી રેખાઓ હોવી જોઈએ જેમ કે મધ્યમ 1 માં AB અને મધ્યમ 2 માં BC; પ્લેન S માં બિંદુ B શોધવાનો છે.

કોઈપણ સામાન્ય બિંદુ K સપાટી S પર હોય.તેમાં કોઓર્ડિનેટ્સ $(x, 0, z)$ છે. પ્રકાશીય પથનું બિંદુ $K(x, 0, z)$ દ્વારા આપવામાં આવે છે.

$\Delta = (AK)\mu_1 + (KC)\mu_2$

$= \mu_1(x^2 + a^2 + z^2)^{1/2} + \mu_2[(x-c)^2 + b^2 + z^2]^{1/2}$ --------------(10)

હવે વાસ્તવિક માર્ગ મેળવવા માટે ફર્મેટની શરત લાગુ કરો.

$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial z}\right)_x = 0$

$\therefore\ z = 0$

તેનો અર્થ એ છે કે આપાત કિરણ , વક્રીવર્તિત કિરણ અને સામાન્યથી પ્લેન PQRS એક જ સમતલમાં આવેલા છે. આ વક્રીભવનનો પહેલો નિયમ છે.

બીજી શરત લાગુ કરવી કે

$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial z}\right)_x = 0$

$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial z}\right)_x = \frac{\mu_1}{2}\left[\frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2+z^2}}\right] + \frac{\mu_2}{2}\left[\frac{2(x-c)}{\sqrt{(x-c)^2+b^2+z^2}}\right] = 0$

$\frac{\mu_1 x}{\sqrt{x^2+b^2+z^2}} = \frac{\mu_2(c-x)}{\sqrt{(x-c)^2+b^2+z^2}}$

$\mu_1 \sin i = \mu_2 \sin r$

$\therefore\ \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ -------------(11)

આ સ્નેલનો નિયમ છે.

દાખલા(Example):

1. પ્રકાશનું એક કિરણ 1 .33 વક્રીભવનાંકવાળા માધ્યમામાંથી 30^0 ના કોણે આપાત થઇ 1.5 વક્રીભવનાંકવાળા માધ્યમમાં વક્રીભૂત થાય છે, તો વક્રીભૂત કોણ કેટલો ?

$\mu_1 = 1.33$, આપાત કોણ $i = 30^0$

$\mu_2 = 1.5$, વક્રીભૂત કોણ $= r = ?$

સ્નેલના નિયમ પ્રમાણે $\mu_1 \sin i = \mu_2 \sin r$

$\therefore\ 1.33 \times \sin 30^0 = 1.5 \times \sin r$

$\therefore\ \sin r = \frac{1.33 \times 0.5}{1.5} = 0.4425 = \sin 26^0 16'$

$\therefore$ વક્રીભૂત કોણ $= r = 26^0 16'$

પ્રશ્નો(Questions):

1.ફર્માટના ન્યૂનતમ સમયનો સિધ્ધાંત લખો અને ઉદાહરણ આપી સમજાવો.

2. ફર્માટના અંતિમ પથનો સિધ્ધાટ સમજાવો.

3. પરાવર્તનના નિયમો સમજાવો.

4.ફર્માટના સિધ્ધાંતનો ઉપયોદ કરી પ્રકાશના વક્રીભવન માટેના સ્નેલના નિયમનું વ્યાપક સ્વરૂપ $\mu_1 \sin i = \mu 2 \sin r$ મેળવો.