Sem-5 MINOR (NEP-2023)

COURSE CODE: SC23MIDSCPHY502

Paper-502, Unit-1, Ch-1 SPECIAL THEORY OF RELATIVITY

Syllabus:

- **Newtonian Relativity (14.1),**
- **Michelson-Morley experiment (14.2),**
- **Special theory of relativity (14.3),**
- **Lorentz Transformation (14.4),**
- **Consequences of Lorentz Transformation (14.5) –**
- **(a) Relativity of simultaneity (b) Lorentz-fitz Gerald length Contraction (c) Time dilation,**
- **Addition of Velocities (14.6),**
- **Variation of mass with Velocity (14.7)**
- **Mass- energy relation (14.8)**

- **Related Examples, Problems, MCQ & Short Questions**

Basic Reference:

Introduction to Classical Mechanics
by R G Takwale & P S Puranik
Mc-GrawHill Education (India) Private Limited

Other References:

1. Concept of Modern Physics by Besier McGraw-Hill
2. Elements of Special Relativity by S.P. Singh & M.k.Bagde S. Chand & Co. New Delhi.
3. Properties of Matter by Brijlal, N.Subrahmanyam, S.chand.
4. Classical Mechanics by Goldstein Narosa Publishing House New Delhi
5. Classical Mechanics by Yashavant Waghmare
6. Classical Mechanics by N C Rana and P S Joag

સાપેક્ષવાદ: (Relativity)

સમગ્ર વિશ્વ મુખત્વે ત્રણ રાશિઓનું બનેલું છે.

(i) દ્રવ્યમાન (Mass) , (ii) અવકાશ (Space), અને (iii) સમય (Time)

આઈન્સ્ટાઈને આ ત્રણેય રાશીઓને સમજાવવાનો પ્રયત્ન વિશિષ્ટ સાપેક્ષવાદ ના સ્વરૂપે કર્યો. સાપેક્ષવાદ મુખત્વે બે theory ના સ્વરૂપે છે.

(1) વિશિષ્ટ સાપેક્ષવાદ (Special theory of Relativity)

(2) વ્યાપત સાપેક્ષવાદ (General theory of Relativity)

સંદર્ભ તંત્ર એટલે શું? (What is Reference Frame?)

- જ્યારે કોઈ ભૌમિતિક ઘટનાને સમજાવવી હોય ત્યારે કાર્ટેઝીયન યામોની મદદથી તેની યોગ્ય રજૂઆત થઈ શકે છે.
- આવા કાર્ટેઝીયન યામો x, y, z અને ચોથા યામ તરીકે સમય t લઈને બનતી રચનાને Reference frame કહે છે.
- એકજ રાશીને સમજાવવા માટે પરિસ્થિતિને અનુરૂપ અલગ-અલગ સંદર્ભતંત્રને લઈ શકાય છે. જેમ કે વેગના નિરૂપણ માટે કોઈ સંદર્ભતંત્ર k લઈએ જે સ્થિર છે. તેના યામો x, y, z છે. અને સમયના યામ તરીકે t છે.
- જો કોઈ Reference frame માં રહેલ પદાર્થ, ન્યુટનના પ્રથમ નિયમને અનુસરે તો તેવી Reference frame ને જડત્વીય(inertial) Reference frame કહે છે. કારણ કે ન્યુટનનો પ્રથમ નિયમ જડત્વને અભિવ્યક્ત કરે છે.
- “બાહ્ય બળની ગેરહાજરીમાં અચળ વેગથી ગતિ કરતો પદાર્થ અચળવેગી ગતિ કરે છે. જ્યારે સ્થિર પદાર્થ સ્થિર રહે છે.” જો કોઈ Reference frame નો વેગ સતત બદલાતો જતો હોય તો આવી Reference frame ને Non-inertial Reference frame કહે છે.

ન્યૂટોનિયન સાપેક્ષવાદ સમજાવો. (Explain Newtonian relativity): (14.1)

ન્યુટને પદાર્થની ગતિને સમજાવતા નિયમો આપ્યા છે. પદાર્થની ગતિ તેના વેગ, પ્રવેગ, વગેરે રાશીઓને મેળવવાથી સમજી શકાય છે. હવે જો કોઈ પદાર્થનો વેગ બે સંદર્ભતંત્રો માથી અલગ-અલગ માપવામાં આવે, જેમાં એક સંદર્ભતંત્ર સ્થિર અને એક અચળ વેગથી ગતિ કરતું

હોય, તો ચોક્કસ પરિણામ પ્રાપ્ત થાય છે. ગેલેલીયોના રૂપાંતરણ સમીકરણ નું સામને સાપેક્ષ વિકલન લેવાથી બંને સંદર્ભતંત્રોમાં વેગની કિમત મળે છે.

$$x = x' + vt \quad , \quad y = y' \quad , \& \quad z = z' \quad \ldots.\ldots.\ldots. \quad eqn\ (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} \quad , \quad \& \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt}$$

પરંતુ ઉપરના સમીકરણ માં $\frac{d}{dt} = u$ લેતા,

$$u_x = ux' + v \quad , \quad u_y = uy' \quad , \& \quad u_z = uz' \quad \ldots\ldots.\ldots \quad eqn\ (2)$$

સમીકરણ (2) ને વ્યાપક રીતે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય

$$u = u' + v \quad \ldots \quad \ldots. \ \ldots \quad eqn\ (3)$$

આ સમીકરણ (3) નું સમય ને સાપેક્ષ વિકલન લેતા, પ્રવેગ નું મૂલ્ય મળે છે.

$$\frac{d}{dt}(\overline{u}) = \frac{d}{dt}(u') + 0$$

$$\therefore \ \dot{\overline{u}} = \dot{\overline{u}}'$$

$$\therefore \ \mathrm{a} = \mathrm{a}' \quad \ldots \quad \ldots. \ \ldots \ eqn\ (4)$$

સમીકરણ (4) પરથી કહી શકાય કે પદાર્થની ગતિનું ગાણિતિય સ્વરૂપ બંને સંદર્ભતંત્રો માટે એક સરખું મળે છે. આમ, "પદાર્થની ગતિને અનુભવવા માટે બે સંદર્ભતંત્રોની જરૂર રહે છે. પરંતુ બંને સંદર્ભતંત્રો માં ગતિનું ગાણિતિય સ્વરૂપ એક સરખું રહે છે.

માઈકલશન-મોર્લેનો પ્રયોગ સવિસ્તાર સમજાવો. અને તેના પરિણામોની ચર્ચા કરો. (14.2) Michelson-Morley experiment's & results: (Explain in details Michelson-Morley's experiments and discuss its results.)

સિધ્ધાંત: જ્યારે પ્રકાશના વેગનું માપન તેના વેગની દિશામાં અને પૃથ્વીના વેગની વિરુદ્ધ દિશામાં કરવામાં આવે ત્યારે અલગ-અલગ મળે છે.

સાધન : ઇન્ટરફેરોમિટર

રચના :

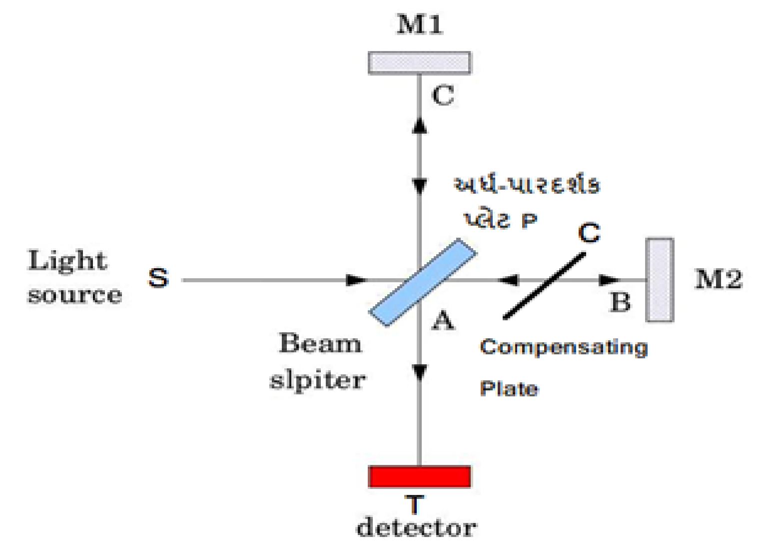


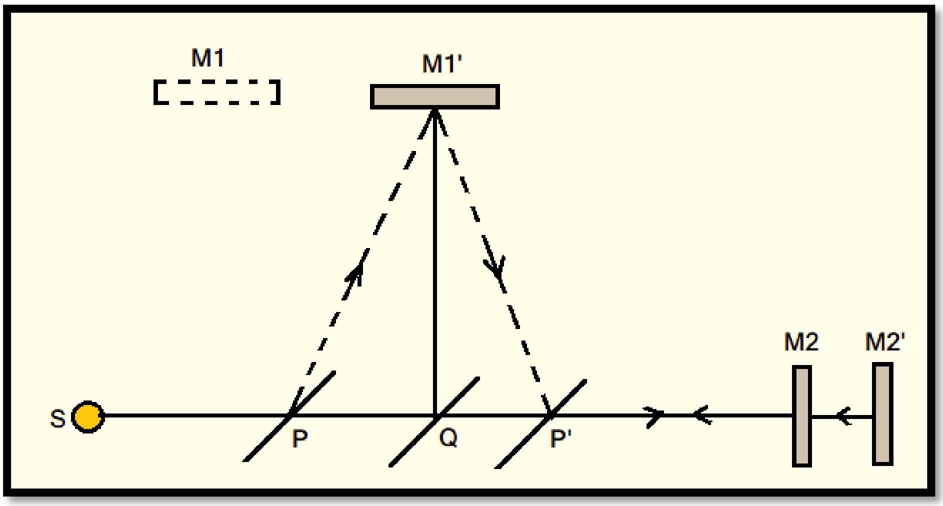
Fig:1 Michelson-Morley interferometer

Michelson-Morley એ પ્રયોગ માટે જે સાધનની રચના કરી તેને Michelson-Morley interferometer કહે છે. જેમાં બે પરસ્પર લંબ અરીસાઓ M1 અને M2 ગોઠવેલ હોય છે. અહી પ્લેટ P એ અર્ધ પારદર્શક હોય છે, કે જેમાં ચાંદીનો ઢોળ ચડાવેલ હોય છે. પ્લેટ P એ પ્રકાશના ઉદગમ(S) સાથે 45^0 નો કોણ બનાવે છે. અને તેને સમાંતર અન્ય એક પ્લેટ C હોય છે. જેને Compensating પ્લેટ કહે છે. જે પથતફાવત ઉત્પન્ન કરે છે. M2 ના સામેના છેડે પ્રકાશ સ્રોત(Source) હોય છે. અને અરીસા M1 ના સામેના છેડે ટેલિસ્કોપ(T) રાખવામા આવે છે.

કાર્ય: પ્રકાશના ઉદગમ(S) માથી આવતું કિરણ પ્લેટ(P) પર આપાત થાય છે. અને તેનું અંશત: પારગમન અને અંશત: પરાવર્તન થાય છે. જેમાં M1 તરફ પરાવર્તિત કિરણ, જ્યારે M2 તરફ પારગમિત કિરણ જાય છે. આ બંને કિરણો અનુક્રમે અરીસા M1 અને M2 તરફ પરાવર્તિત થઈ તે જ પથ પર પાછા વળે છે, અને બંને પ્લેટ(P) પર ફરીથી આપાત થાય છે. અહી નિશ્ચિત પથતફાવતને કારણે વ્યતિકરણની શલાકાઓ જોવા મળે છે. તેને ટેલિસ્કોપ (T) દ્વારા અવલોકનના સ્વરૂપે જોઈ શકાય છે.

પ્રાયોગિક પ્રક્રિયા:

ધારો કે પૃથ્વીઈથરમાં v વેગ થી ગતિ કરે છે. હવે ઇન્ટરફેરોમિટરની ગોઠવણી એવી રીતે કરવામાં આવે છે, કે જેથી સાધન અને પૃથ્વી એકજ દિશામાં ગતિ કરે છે.



ઇન્ટરફેરોમિટર પૃથ્વીની ગતિની દિશામાં v વેગથી ગતિ કરે છે, જ્યારે પ્રકાશ કિરણ પ્લેટ P પર આપાત થાય છે. અહી કિરણનું અંશત: પરાવર્તન અને અંશત:પારગમન પામે તેવા બે કિરણોમાં વિભાજીત થાય છે. જ્યાં પરાવર્તિત કિરણ $\overline{PM'P'}$ અને પારગમીત કિરણ $\overline{PM_2{}'P'}$ પથ પર ગતિ કરશે. ધારોકે પરાવર્તિત પ્રકાશ પ્લેટ P થી અરીસા $M_1{}'$ પર પહોચતા t જેટલો સમય લે છે, તેટલા જ સમયમાં પ્લેટ P થી Q પર પહોચે છે.

અહી પૃથ્વીનો વેગ v તથા પ્રકાશનો વેગ c હોય તો,

અંતર $\overline{PQ} = v \cdot t \quad \dots\dots\dots\dots eqn\,(1)$ & $\quad \overline{PM_1'} = c \cdot t \quad \dots\dots\dots\dots eqn\,(2)$

ધારોકે પરાવર્તિત કિરણને મુસાફરી પૂરી કરી P' સુધી પહોંચવા માં લાગતો સમય t_2 હોય તથા પરાવર્તિત કિરણ $\overline{PM_1'}$ તથા $\overline{M_1'P'}$ સુધી મુસાફરી કરે છે. તે જ રીતે પારગમીત કિરણ ને P થી $M_2{}'$ અને $M_2{}'$ થી P' પર પહોંચવા માટે લાગતો સમય t_1 હોય તો પથતફાવત $\Delta l = c(t_1 - t_2)$ થાય.

પારગમીત કિરણ ને લાગતો મુસાફરીનો સમય (t_1) :

ધારો કે પારગમીત કિરણ ને અરીસા $M_2{}'$ સુધી પહોંચવા માટે લાગતો સમય t_1' છે. અહી કિરણ પૃથ્વીના વેગ ની દિશામાં ગતિ કરતું હોવાથી તેનો વેગ $(c + v)$ થશે. હવે જો પ્લેટ થી અરિસાનું અંતર (l) હોય તો,

$$t_1 = \frac{l}{(c + v)} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad eqn\,(3)$$

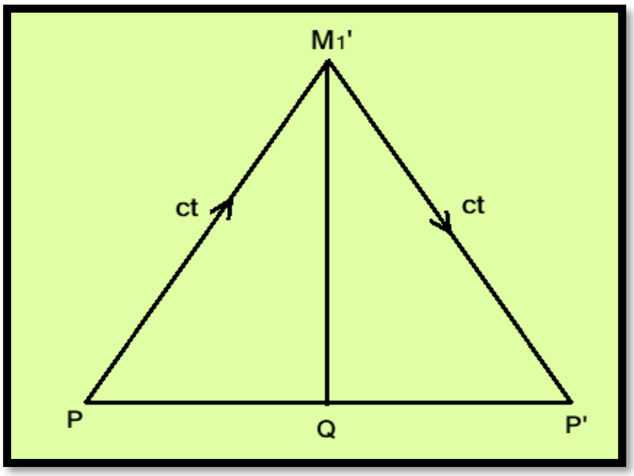
આ કિરણ $M_1{}'$ થી P' પર જો t_1'' સમયમાં પહોચે તો પ્રકાશ કિરણ પૃથ્વીના વેગ ની વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતું હોય તો,

$$t_1'' = \frac{l}{(\bar{c} - \bar{v})} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad eqn(4)$$

પારગમીત કિરણ ને લાગતો મુસાફરી સમય (t_1) :

$$t_1 = t_1' + t_1'' = \frac{l}{(c + v)} + \frac{l}{(\bar{c} - \bar{v})} = \frac{2lc}{(c^2 - v^2)} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad eqn(5)$$

પરાવર્તિત કિરણને લાગતો સમય t_2 :



પાયથાગોરસ ના પ્રમેય મુજબ ,

$$(ct)^2 = l^2 + (PQ)^2$$

$$(ct)^2 = l^2 + (vt)^2 \qquad \text{(From eqn-1)}$$

$$c^2t^2 - v^2t^2 = l^2$$

$$t^2(c^2 - v^2) = l^2$$

$$t^2 = \frac{l^2}{(c^2 - v^2)}$$

કિરણ ને P થી M_1' અને M_1' થી P' સુધી પહોંચવા માટે લાગતો સમય

$$t_2 = 2t$$

$$\therefore \ t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots eqn\,(6)$$

અહી સમીકરણ (5) અને (6) ની કિમત અલગ-અલગ છે. જે દર્શાવે છે કે બંને કિરણો ને P' પર પહોંચવા માટે લાગતો સમય અલગ હોવાથી તેમની વચ્ચે પથતફાવત રચાશે. પરિણામે વ્યતિકરણ શલાકાઓ મળશે.

પથતફાવત $\Delta l = C[t_1 - t_2]$

[અહી અંતર=વેગX સમય] પ્રકાશીય કિરણ માટે પાઠ તફાવત હોવાથી C લેતા,

પથતફાવત

$$\Delta l = C[t_1 - t_2]$$

$$= C\left[\frac{2lc}{(c^2 - v^2)} - \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right]$$

$$= \left[\frac{2lc^2}{(c^2 - v^2)} - \frac{2lc}{(c^2 - v^2)^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{2l}{\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)} - \frac{2l}{\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$\Delta l = 2l\left[\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. eqn\,(7)\right]$$

$eqn\,(7)$ નું સાદુંરૂપ બાયનોમિયલ theorem મુજબ આપતા,

$$\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{-1} = 1 + ({v^2}/{c^2}) + \cdots\ldots\ldots$$

$$\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\,({v^2}/{c^2}) + \ldots\ldots..$$

હવે, $v \ll c$ હોવાથી ઊંચી ઘાત વાળા પદોને અવગણતા ,

$$\Delta l = 2l\left[\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 2l\left[1 + {v^2}/{c^2} \;- 1\; \frac{1}{2}\cdot {v^2}/{c^2}\right]$$

$$= 2l\left[\frac{1}{2}\cdot {v^2}/{c^2}\right]$$

$$\Delta l = l\cdot {v^2}/{c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \; eqn(8)$$

જો interferometer ને 90^0 ફેરવવામાં આવે તો પથતફાવત બમણો થશે.

$$\Delta l = 2\,\Delta l = 2l\cdot {v^2}/{c^2}$$

જો આપાત પ્રકાશની તરંગલંબાઈ λ હોયતો શલાકાનું સ્થાનાંતર થશે જેને નીચે મુજબ દર્શાવી

શકાય.

$$\Delta F = \frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{2l}{\lambda}\cdot\frac{v^2}{c^2}$$

જ્યાં

$$\mathrm{c} = 3\times 10^{10}\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}} \qquad \& \quad \mathrm{v} = 3\times 10^{6}\ \mathrm{cm/sec}$$

$$l = 11\ \text{meter} \quad \& \quad \lambda = 6000\times 10^{-8}\ cm$$

$$\Delta F = \frac{2l}{\lambda}\cdot\frac{v^2}{c^2} = \frac{2\times 11\times 3\times 3\times 10^{12}}{6\times 10^{-5}\times 3\ \times 10^{10}\ \times 3\times 10^{10}}$$

$$\Delta F = 0.36\ \text{Fringes}\ \cong\ 0.4\ \text{Fringes}$$

અહી અપેક્ષિત સ્થાનાંતર કરતાં શલાકાઓનું સ્થાનાંતર 20 ગણું ઓછું મળે છે. જે નેગેટિવ પરિણામ છે. આજ પ્રયોગ જુદા-જુદા સમયે, જુદા-જુદા સ્થળોએ ફરીથી કરવામાં આવ્યો છતાં પરિણામો સરખા માલૂમ પડ્યા , જે પ્રયોગની નિષ્ફળતાદર્શાવે છે. પરિણામે ઈથરના અસ્તિત્વ વિશેજ પ્રશ્નાર્થ ઊભો થયો.

વિશિષ્ટ સાપેક્ષવાદ: (Special Theory of Relativity) (14.3)

Question: આઇન્સટાઇન નો વિશિષ્ટ સાપેક્ષવાદ શું છે? સાપેક્ષવાદ ના બે અધિતર્ક જણાવો.

જ્યારે પદાર્થની ગતિ પ્રકાશની ગતિ કરતાં ખુબજ ઓછી હોય ત્યારે આવી ગતિને Classical Mechanics કે Newtonian Mechanics દ્વારા સમજાવી શકાય છે. પરંતુ જ્યારે તે ગતિ પ્રકાશની ગતિની નજીક પહોંચે છે ત્યારે તેને સમજાવવામાં આ mechanics નિષ્ફળ જાય છે. જેથી આઇન્સટાઇને એક નવી જ theory આપી જેને આઇન્સટાઇન નો સાપેક્ષવાદ કહે છે.

વિશિષ્ટ સાપેક્ષવાદ: (Special Theory of Relativity)

ઇ.સ.1905માં Einstein એ આ વાદ આપ્યો. અચળ ગતિ કરતાં પદાર્થોની ગતિના જડત્વીય સંદર્ભતંત્રમાં થતી ગતિના પ્રશ્નો હલ કરવા અને સમજવા આ વાદ ઉપયોગી છે.

વ્યાપ્ત સાપેક્ષવાદ: (General Theory of Relativity)

ઇ.સ.1915માં વિશિષ્ટ સાપેક્ષવાદ નો વિકાસ કરી, વ્યાપ્ત સાપેક્ષવાદ સ્વરૂપે રજૂ કર્યો. પ્રવેગી ગતિને સમજાવવાનો પ્રયત્ન આ વાદમાં રજૂ થયો.

સાપેક્ષવાદના બે અધિતર્કો છે.

(i) સમતુલનનો સિદ્ધાંત & (ii) પ્રકાશ વેગના અચળત્વનો સિદ્ધાંત:

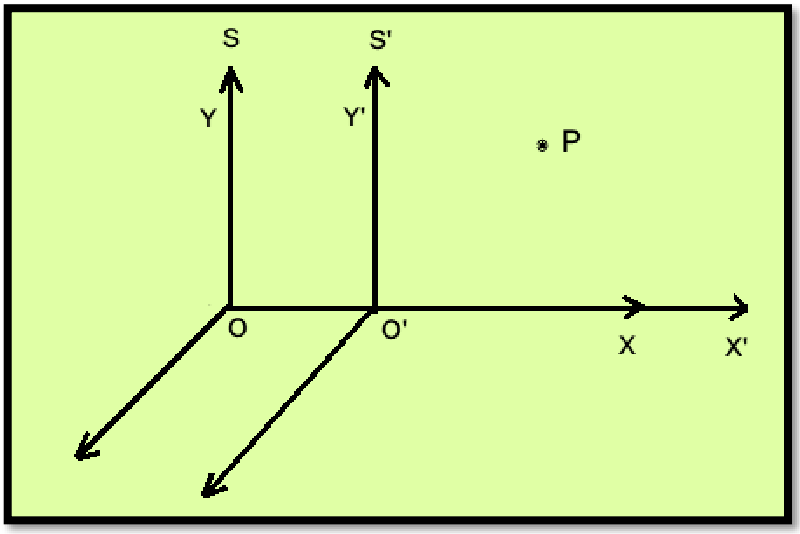
સમતુલનનો સિદ્ધાંત: અચળ વેગથી સાપેક્ષગતિ કરતાં દરેક સંદર્ભતંત્રમાં ભૌતિકશાસ્ત્રના નિયમોનું ગાણિતિય સ્વરૂપ સમાન હોય છે.

પ્રકાશ વેગના અચળત્વનો સિદ્ધાંત: પ્રકાશનો વેગ શૂન્યાવકાશમાં અચળ રહે છે. તે ઉદગમસ્થાનના કે અવલોકનકારના વેગ થી સ્વતંત્ર હોય છે.

Question: લોરેંટ્ઝના રૂપાંતરણના સમીકરણ મેળવો.

Lorentz Transformation equations (14.4)

માઈકલશન-મોર્લેના પ્રયોગની નિષ્ફળતાના કારણો સમજાવતા Einstein એ પોતાના ક્રાંતિકારી વિચારો રજૂ કર્યા. જેને સાપેક્ષવાદ તરીકે ઓળખાય છે. Einstein એ સાપેક્ષવાદના બે અધિતર્કો આપ્યા. તેનો આધાર લઈને લોરેંટ્ઝ એ ગતિના સમીકરણ વચ્ચે સંબંધ દર્શાવતા સૂત્રો તારાવ્યા જેને લોરેંટ્ઝના રૂપાંતરણ ના સમીકરણો કહે છે.



ધારોકે S અને S' બે સંદર્ભ તંત્રો છે. જેમાં S સ્થિર અને S' એ S ને સાપેક્ષ $\vec{v}$ જેટલા અચળ વેગથી X-અક્ષની દિશામાં ગતિ કરે છે. કોઈ ઘટના નું અવલોકન એક સંદર્ભતંત્રમાં રહેલો અવલોકનકાર નોંધે છે. તે જ ઘટના અન્ય સંદર્ભતંત્રમાં રહેલો અવલોકનકાર કઈ રીતે નોંધશે તે લોરેંટ્ઝ transformation સમીકરણ પરથી જાણવા મળશે.

- S - Reference frame માં રહેલો Observer પ્રકાશ સંકેત ની ઘટનાને નીચે મુજબ નોંધશે.

$$\mathbf{x - ct = 0} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{eqn(1)}$$

- S'- Rference frame માટે,

$$\mathbf{x' - ct' = 0} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{eqn(2)}$$

હવે પ્રથમ અધિતર્ક મુજબ ઉપરોક્ત ઘટનાનું ગાણિતીય સ્વરૂપ eqn(1) અને eqn(2) બંને સંદર્ભતંત્રોમાં સમાન થશે. એટલે કે બંને eqn-ને સમાન સ્વરૂપે લખવા તેમણે કોઈ અચળાંક વડે ગુણવા પડશે.

- X-અક્ષની ધન દિશા બાજુ માટે λ અચળાંક લેતા

$$\mathbf{x' - ct' = \lambda(x - ct)} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{eqn(3)}$$

❖ X-અક્ષની ઋણ દિશા બાજુ માટે μ અચળાંક લેતા

$$\mathbf{x'+ct'=\mu(x+ct)} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{eqn(4)}$$

Eqn-(3) અને Eqn-(4) નો સરવાળો લેતા,

$$\mathbf{2x'=\lambda x-\lambda ct+\mu x+\mu ct}$$

$$\mathbf{2x'=(\lambda+\mu)x-(\lambda-\mu)ct}$$

$$\mathbf{x'}=\left(\frac{\boldsymbol{\lambda+\mu}}{\mathbf{2}}\right)\cdot\ \boldsymbol{x}-\left(\frac{\boldsymbol{\lambda-\mu}}{\mathbf{2}}\right)\cdot\ \boldsymbol{ct} \quad \dots\dots\dots \quad \boldsymbol{eqn}(\mathbf{5})$$

$\frac{\lambda+\mu}{2}=\boldsymbol{\alpha}$ અને $\frac{\lambda-\mu}{2}=\boldsymbol{\beta}$ અચળાંકો સ્વીકારતા

$$\mathbf{x'=\alpha x-\beta ct} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{eqn(6)}$$

Eqn-(4) માથી Eqn-(3) બાદ કરતાં,

$$\mathbf{2ct'=\mu x+\mu ct-\lambda x+\lambda ct}$$

$$\mathbf{2ct'=(\lambda+\mu)ct-(\lambda-\mu)x}$$

$$\mathbf{2t'=(\lambda+\mu)t-\frac{(\lambda-\mu)x}{\boldsymbol{c}}}$$

$$\mathbf{t'=\frac{(\lambda+\mu)t}{2}-\frac{(\lambda-\mu)x}{2\boldsymbol{c}}}$$

$$\mathbf{t'=\alpha t-\frac{\beta x}{\boldsymbol{c}}} \quad \dots\dots\dots \quad \boldsymbol{eqn}(\mathbf{7})$$

જો eqn-(6) માં $\mathbf{x'=0}$ લઈએ તો સંદર્ભતંત્ર S ને સાપેક્ષ સંદર્ભતંત્ર S' નો વેગ v મળશે.

$$\mathbf{0=\alpha x-\beta ct}$$

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{t}}=\frac{\mathbf{\beta c}}{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathbf{\beta c}}{\boldsymbol{\alpha}} \quad \dots\dots\dots \quad \boldsymbol{eqn}(\mathbf{8})$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\beta}=\frac{\boldsymbol{\alpha v}}{\boldsymbol{c}} \quad \dots\dots\dots \quad \boldsymbol{eqn}(\mathbf{8.}\boldsymbol{A})$$

જો eqn-(6) માં $\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$ લઈએ તો S' સંદર્ભતંત્રમાં એવા અંતરનું અવલોકન મળશે કે જે અંતર S સંદર્ભતંત્રમાં માપેલું હોય $\boldsymbol{x'}=\mathbf{\alpha x-\beta ct}$ $\quad\therefore\ \mathbf{x'=\alpha x}$

ખુબજ નાના અંતર માટે , $\mathbf{\Delta x'=\alpha\Delta x}$

જો $\mathbf{\Delta x'=1}$ લઈએ તો $\Delta x=\frac{1}{\alpha}$ $\dots\dots\dots$ $\boldsymbol{eqn}(\mathbf{9})$

ઉપરોક્ત સમીકરણ દર્શાવે છે કે S' સંદર્ભતંત્રમાં અંતરનું માપન એકમ હોય તો S સંદર્ભતંત્રમાં તે અંતર $\frac{1}{\alpha}$ જેટલું મળે છે.

જો eqn-(6) માં $t' = 0$ લેતા અગાઉથી ઊલટો કિસ્સો મળશે. એટલે કે S સંદર્ભતંત્રમાં માપેલા અંતરનું અવલોકન S' સંદર્ભતંત્રમાં કેટલું મળે છે તે દર્શાવે છે.

$$t' = \alpha t - \frac{\beta x}{c}$$

$$\alpha t = \frac{\beta x}{c}$$

$$\therefore t = \frac{\beta x}{\alpha c} = \frac{\alpha v}{c} \cdot \frac{x}{\alpha c} = \frac{vx}{c^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad eqn(10)$$

t ની કિમત સમીકરણ (6) મ મૂકતાં,

$$x' = \alpha x - \beta ct$$

$$x' = \alpha x - \beta c \cdot \frac{vx}{c^2} = \alpha x - \beta \frac{vx}{c}$$

$$x' = \alpha x - \frac{\alpha v}{c} \cdot \frac{vx}{c} \quad (\because \beta \text{ ની કિમત મૂકતાં})$$

$$x' = \alpha\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot x$$

નાના અંતર માટે, $\Delta x' = \alpha\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \Delta x$

$\Delta x' = 1$ લેતા, $\Delta x' = \alpha\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ ....$eqn(11)$

S સંદર્ભતંત્રમાં માપેલ એકમ અંતર S' માં $\alpha\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ મળે છે. પરંતુ સમીકરણ(9) અને સમીકરણ(11) પર પ્રથમ અધિતર્ક મુજબ સમતુલનનો સિદ્ધાંતલાગુ પાડતા,

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\therefore \alpha^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$\therefore\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad eqn(12)$$

બંને અચળાંકો α & β ની કિમતો સમીકરણ (6) માં લેતા,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} \quad \& \quad \beta = \frac{\alpha v}{c}$$

$$x' = \alpha x - \beta ct$$

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} - \frac{\alpha v}{c} \cdot ct$$

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} - \frac{1\, vt}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

$$\therefore\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

સમીકરણ(7) માં અચળાંકો ની કિમતો લેતા,

$$t' = \alpha t - \frac{\beta x}{c}$$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} - \frac{\alpha v}{c} \cdot \frac{x}{c}$$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} - \alpha \cdot \frac{vx}{c^2}$$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} - \frac{{vx}/{c^2}}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - {vx}/{c^2}}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

અહી પ્રકાશ સંકેત માત્ર x- દિશામાં જ ગતિ કરતો હોય તો y = y' અને z = z' જેથી Lorentz's transformation સમીકરણ નીચે મુજબ થશે.

(i) $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$ or $x' = \alpha(x - vt)$ $wherw\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$

(ii) $y = y'$

(iii) $z = z'$

(iv) $t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ or $t' = \alpha \cdot \left(t - vx/c^2\right)$

ઉપરોક્ત સમીકરણો અવલોકનોનું સંદર્ભતંત્ર S માથી S' માં રૂપાંતર આપે છે. તે જ રીતે S' ના અવલોકનોનું S માં રૂપાંતર નીચેના સમીકરણ થી મેળવી શકાય.

(i) $x = \alpha(x' - vt')$ $\quad wherw\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

(ii) $y' = y$

(iii) $z' = z$

(iv) $t = \alpha \cdot \left(t' - vx'/c^2\right)$

જો વેગ v બહુજ નાનો હોય તો $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ એટલે કે $\alpha = 1$ ત્યારે લોરેંટ્ઝ રૂપાંતરણ સમીકરણો $x = (x' + vt')$, $y = y'$, $z = z'$, અને $t = t'$ થાય. જે Galilean Transformation સમીકરણ છે.

Consequences of Lorentz Transformation (14.5)

Qus: લોરેંટ્ઝના રૂપાંતરણના સમીકરણોની મદદથી નીચેની ઘટનાઓ સમજાવો.

(a) એક સાથે બનતી ઘટનાઓ માટે નો સાપેક્ષવાદ (Relativity of simultaneity)

(b) લોરેંટ્ઝ સંકોચન (Lorentz Contraction) અને (c) સમય વિતનન (Time dilation)

(a) એક સાથે બનતી ઘટનાઓ માટે નો સાપેક્ષવાદ: (Relativity of simultaneity)

સાપેક્ષવાદ એ અવકાશ, સમય, અને દ્રવ્યમાનની સંપૂર્ણ સમજૂતી આપે છે. વિશ્વ મુખ્ય જે ત્રણ રાશિઓનું બનેલું છે. તેની સમજૂતી કુદરતના અકળ રહસ્યો સમજવામાં ચાવીરૂપ છે. શરૂઆતમાં એવું માનવામાં આવતું હતું કે અવકાશ, સમય અને દ્રવ્યમાન જેવી રાશિઓ નિરપેક્ષ છે. તેમના પર કશી અસર થઈ શક્તિ નથી.પરંતુ આઈન્સ્ટાઈને આ ઘટનાઓની સમજૂતી આપી. જેમાં પ્રથમ એકસાથે બનતી ઘટનાઓની સમજૂતી છે.

ધારોકે બે નિરીક્ષકો બે ઘટનાઓનું નિરીક્ષણ નોંધે છે. એક નિરીક્ષક સંદર્ભતંત્ર S કે જે સ્થિર છે, તેમાં રહેલો છે. બીજો નિરીક્ષક સંદર્ભતંત્ર S ને સાપેક્ષ v વેગથી ગતિ કરતાં સંદર્ભતંત્ર S' માં રહેલો છે.

સંદર્ભતંત્ર S માં રહેલ નિરીક્ષક બંને ઘટનાઓનો સમય t_1 અને t_2 તેમજ સંદર્ભતંત્ર S' માં રહેલ નિરીક્ષક માટે આ જ ઘટનાઓનો સમય t1' અને t2' નોંધાય છે. લોરેંત્ઝના રૂપાંતરણ ના સમીકરણ મુજબ,

$$t_1' = \frac{t - {vx_1}/{c^2}}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} \quad \text{અને} \quad t_2' = \frac{t - {vx_2}/{c^2}}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

સંદર્ભતંત્ર S માં રહેલ નિરીક્ષક માટે ધારોકે બંને ઘટના એકસાથે બને છે. એટલે કે તે માટે, $t_1 = t_2$, હવે આજ ઘટનાનો સમય S ને સાપેક્ષ v વેગથી ગતિ કરતાં સંદર્ભતંત્ર S' માં રહેલા નિરીક્ષણ કરતાં,

$$t_1' - t_2' = \frac{{\overline{v}(x_1 - x_2)}/{c^2}}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

ઉપરોક્ત પરિણામ દર્શાવે છે કે સ્થિર નિરીક્ષકે નોંધેલી એકસાથે બનતી ઘટના S' નો નિરીક્ષક અલગ-અલગ સમયે થાય છે, તેમ માપે છે.

(b) લોરેંટ્ઝ સંકોચન: (Lorentz Contraction or Contraction of length)

ક્લાસીકલ મિકેનિક્સ મુજબ અવકાશ એ નિરપેક્ષ છે. એટલે કે તેના પર કોઈ જાતની અસર થતી નથી. એટલે કે તેને તાણી કે સંકોચી શકાતું નથી. પરંતુ આઈન્સ્ટાઈને આ વિભાવનાને તોડી પાડી અને દર્શાવ્યુ કે અવકાશ એ નિરપેક્ષ ન હોતા સાપેક્ષ છે. કોઈપણ બે બિંદુ વચ્ચેનું અંતર એ અવકાશનો તેટલો વિસ્તાર દર્શાવે છે. આમ તે બે બિંદુઓ વચ્ચેનું માપન એ અવકાશમાં તેટલા વિસ્તારનું માપન દર્શાવે છે. હવે જો કોઈ સળિયાના માપનનો કિસ્સો વિચારીએ તો તે માપન એ સળિયાના બે છેડાઓ વચ્ચે રહેલા અવકાશનું માપન દર્શાવશે.

ધારોકે સળિયો X-અક્ષની દિશામાં લંબાયેલો છે. તેથી તેનું માપન X-અક્ષની દિશામાં થશે. હવે , આ સળિયાની લંબાઈ S' સંદર્ભતંત્રમાં રહેલ વ્યક્તિ આ મુજબ માપે છે.

$$l' = x_2' - x_1' \quad \dots\dots\dots \quad eqn(1)$$

અહીં, સળિયાના છેડાઓ અનુક્રમે x_1' અને x_2' પર રહેલા છે. હવે સંદર્ભતંત્ર S નો નિરીક્ષક આ લંબાઈ નીચે મુજબ માપશે.

$$l = x_2 - x_1 \quad \dots\dots\dots eqn\ (2)$$

પરંતુ લોરેંત્ઝના રૂપાંતરણ સમીકરણો મુજબ,

$$x_2' = a(x_2 - vt)$$

$$x_1' = a(x_1 - vt)$$

$$x_2' - x_1' = a(x_2 - x_1)$$

$$l' = al$$

$$\boxed{\therefore\ l' > l}$$

ઉપરોક્ત પરિણામ દર્શાવે છે કે જે v વેગથી ગતિ કરતાં નિરીક્ષક સળિયાની લંબાઈ જેટલી માપે છે, તે જ સળિયાની લંબાઈ S માં રહેલો નિરીક્ષક ઓછી માપે છે. જે અવકાશનું સંકોચન થાય છે તેમ સૂચવે છે. જે અવકાશ પર પણ ગતિની અસર થાય છે, તેમ દર્શાવે છે.

(c) સમય વિતનન: (Time dilation)

સાપેક્ષવાદનું એક અગત્યનું દર્શન એ સમય વિશેનો દ્રષ્ટિકોણ છે. સમય વિશેનું મંતવ્ય એવું છે કે તે સંપૂર્ણ નિરપેક્ષ છે. તેના પર કોઈ અસર પાડી શકાતી નથી અને સ્વતંત્રપણે વિશ્વના સંચાલનમા ભાગીદાર છે. પરંતુ X-અક્ષની ધન દિશામાં કોઈ મુસાફર v વેગથી ગતિ કરે છે. આ નિરીક્ષકનું સંદર્ભતંત્ર S' થશે. જે પોતાની મુસાફરીનો સમય નોંધે છે. જ્યારે સંદર્ભતંત્ર S નો નિરીક્ષક S' ની મુસાફરીનો સમય t નોંધે છે. હવે લોરેંત્ઝના રૂપાંતરણ સમીકરણો મુજબ,

$$t' = \alpha \cdot \left(t - {}^{vx}/_{c^2}\right)$$

હવે $x = vt$,

$$\therefore t' = a \cdot \left(t - {}^{v \cdot vt}/_{c^2}\right)$$

$$\therefore\ t' = at\ \left(1 - {}^{v^2}/_{c^2}\right)$$

$$\therefore\ t' = \frac{t \cdot \left(1 - {}^{v^2}/_{c^2}\right)}{\sqrt{1 - {}^{v^2}/_{c^2}}}$$

$$\therefore\ t' = t \cdot \left(1 - {}^{v^2}/_{c^2}\right)^{1/2}$$

$$\therefore\ t' < t$$

ઉપરોક્ત પરિણામ દર્શાવે છે કે જેમ વેગ વધતો જશે તેમ સમય t' ઘટતો જશે. અર્થાત વેગ વધવાની સાથે તે મુસાફરની ઘડિયાળ ધીમી પડતી જશે. આ ઘટનાને સમય વિતનન (Time Dilation) કહે છે.

❖ Addition of Velocities (14.6)

Qust: Addition of Velocities in two different systems. (Derive the following formula based on Lorentz's equations.) OR Relativistic law of addition of Velocities. OR Determine the equation of the addition of the velocities and hence prove that the Velocity of the light is constant.

વેગના સરવાળાનું સૂત્ર મેળવો તથા તે પરથી સાબિત કરો કે પ્રકાશનો વેગ અચળ છે. OR વેગના રૂપાંતરણનું સમીકરણ તારવો અને તે પરથી પ્રકાશના વેગના અચળત્વનો સિદ્ધાંત સાબિત કરો.

ધારોકે સ્થિર સંદર્ભતંત્ર-S માં કોઈ પદાર્થ dt સમયમાં dx જેટલું સ્થાનાંતર કરે છે. આ જ સ્થાનાંતર અચળ v વેગથી ગતિ કરતાં સંદર્ભતંત્ર-S' નો નિરીક્ષક dv સમયમાં dx' જેટલું નોંધે છે. તેથી,

સંદર્ભતંત્ર-S માં પદાર્થનો વેગ $u = \frac{dx}{dt}$ ……… $eqn(1)$

સંદર્ભતંત્ર-S' માં પદાર્થનો વેગ $u' = \frac{dx'}{dt'}$ ……… $eqn(2)$

હવે, Lorentz transformation equation મુજબ

$$x = \alpha(x' + vt') \quad \dots\dots\dots \quad eqn(3)$$

$$t = a\left(t' + {vx'}/{c^2}\right) \quad \dots\dots\dots \quad eqn(4)$$

સમીકરણ (3) અને (4) નું સમય ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

$$dx = \alpha(dx' + v\, dt') \quad \dots\dots\dots \quad eqn(5)$$

$$dt = a\left(dt' + \frac{v}{c^2}\, dx'\right) \quad \dots\dots\dots \quad eqn(6)$$

સમીકરણ (5) ને (6) વડે ભાગતા,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'+v\,dt'}{dt'+\frac{v}{c^2}\,dx'}$$

જમણી બાજુ ના પદોમાં અંશ અને છેદને dt' વડે ભાગતા,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{dx'}{dt'}+v}{1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}$$

$$\therefore\ u=\frac{u'+v}{1+u'\frac{v}{c^2}}\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ eqn(7)$$

ઉપરોક્ત સમીકરણ એ વેગોના સરવાળાનું સાપેક્ષીય સમીકરણ છે. જેના પરથી એક સંદર્ભતંત્રમાં માપેલા વેગનું બીજા સંદર્ભતંત્રમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય છે.

પ્રકાશના વેગના અચળત્વનો સિદ્ધાંત:

ધારોકે સંદર્ભતંત્ર-S' માં રહેલ નિરીક્ષક પદાર્થનો વેગ u', પ્રકાશના વેગ c જેટલો માપે છે. એટલે કે u'=c આ કિમત સમીકરણ-(7) માં લેતા,

$$\therefore\ u=\frac{c+v}{1+c\frac{v}{c^2}}=\frac{c+v}{1+\frac{v}{c}}=\frac{(c+v)\cdot c}{(c+v)}$$

$$\therefore\ \ u=c$$

આમ આ વેગ S-સંદર્ભતંત્રનો નિરીક્ષક પણ તેટલોજ માપે છે. બીજા શબ્દોમાં પ્રકાશનો વેગ અચળ છે.

Qust: દ્રવ્યમાન અને શક્તિ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

(Relation between Mass & Energy) or

Derive mass-energy relation

- સાપેક્ષવાદે દવ્યમાન વિષેની વિચારધારા જ બદલી નાખી અને દ્રવ્યમાનને નિરપેક્ષ (અચળ) ન ગણતા સાબિત થયું કે ચોક્કસ પરિસ્થિતિમાં તે બદલાય છે.
- ન્યુટનના ગતિના બીજા નિયમ મુજબ

$$\bar{F}=\frac{d(m\overline{v})}{dt}$$

હવે, દ્રવ્યમાનને અચળન લેતા ચલ રાશિ તરીકે લઈએ તો,

$$\bar{F} = \mathrm{m}\,\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots eqn\,(1)$$

હવે, પદાર્થ પર F જેટલું બળ લાગતાં, ધારોકે તે dx જેટલું સ્થાનાંતર કરે છે. જેથી તેના પર Fdx જેટલું કાર્ય થાય છે. આટલા જ કાર્યનું રૂપાંતરતેને ગતિશક્તિ આપવા માટે થાય છે.

∴ પદાર્થની ગતિશક્તિ $\boldsymbol{dT = F \cdot dx}$

$$\therefore \boldsymbol{dT = m\frac{d\bar{v}}{dt}\ dx + \bar{v}\ \frac{dm}{dt}\ dx}$$

$$\therefore \boldsymbol{dT = m\,d\,\bar{v}\left({dx}/_{dt}\right) + \bar{v}\ dm\left({dx}/_{dt}\right)}$$

$$\therefore \boldsymbol{dT = m\,\bar{v}\,d\,\bar{v} + v^2\,dm} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \boldsymbol{eqn\,(2)}$$

હવે, વેગ સાથે દ્રવ્યમાનમાં થતાં ફેરફાર નું સૂત્ર નીચે મુજબ મળે છે.

$$\boldsymbol{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - {v^2}/_{c^2}}}}$$

$$\boldsymbol{m^2 = \frac{{m_0}^2}{1 - {v^2}/_{c^2}}}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{m^2c^2 - m^2v^2 = {m_0}^2c^2}$$

ઉપરોક્ત સમીકરણ નું વિકલન કરતાં,

$$\boldsymbol{2m\,c^2\,dm - 2m\,v^2dm - 2\,m^2\,v\,dv = 0}$$

(જ્યાં, $\mathbf{c}$ = પ્રકાશનો વેગ અને $\boldsymbol{m_0 = rest\,mass}$)

$$\therefore\ \boldsymbol{c^2\,dm - v^2dm - m\,\bar{v}\,dv = 0}$$

$$\therefore \boldsymbol{c^2\,dm = m\,\bar{v}\,dv + v^2dm} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\boldsymbol{eqn\,(3)}$$

સમીકરણ (2) પરથી, ઉપરોક્ત સમીકરણ માં જમણીબાજુની કિમત મૂકતાં,

$$\therefore \boldsymbol{c^2\,dm = dT}$$

$$\therefore \boldsymbol{dT = c^2\,dm}$$

કુલ ગતિશક્તિ $T = \int dT = \ c^2 \int_{m_0}^{m} dm$

$$T = (m - m_0)\, c^2$$

હવે , પદાર્થ સાથે સંકળાયેલ સ્થિતિશક્તિ ને પણ તેના દ્રવ્યમાન અને પ્રકાશવેગના વર્ગના ગુણાકારના સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય.

$$\therefore \text{સ્થિતિશક્તિ} = \mathbf{u} = m_0\, c^2$$

હવે, કુલ શક્તિ $\quad \mathbf{E} = (\mathbf{T} + \mathbf{u})$

$$\mathbf{E} = (m - m_0)\, c^2 + m_0\, c^2$$

$$E = m\, c^2$$

ઉપરોક્ત સમીકરણ પરથી કહી શકાય કે દ્રવ્યમાન અને શક્તિ બે અલગ-અલગ રાશિ ન હતી, પરંતુ એકબીજાની પૂરક છે, અને જુદા-જુદા સમયે કોઈ એક રાશિ તરીકે અભિવ્યક્ત થાય છે.

Variation of mass with Velocity: (14.7)

Qust: **વેગ દ્વારા દ્રવ્યમાનમાં થતાં ફેરફારનું સૂત્ર તારવો. અથવા દ્રવ્યમાન અને વેગ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતુ સમીકરણ તારવો.**

(Derive equation of Variation of mass with Velocity OR Derive equation to relative - Mass-Velocity)

ધારો કે બે પદાર્થો એકબીજાને સાપેક્ષ ગતિ કરી અથડામણ અનુભવે છે, અને અથડામણ બાદ એક પદાર્થમાં ફેરવાય છે. હવે આ ભૌતિકીય ઘટના S અને S' ના નિરીક્ષકો નીચે મુજબ અવલોકે છે.

અચળ વેગ v થી ગતિ કરતાં સંદર્ભતંત્રમાં મળતું નિરીક્ષણ:

- બંને પદાર્થોના દળ m' છે.
- X-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતાં પદાર્થોનો વેગ u' છે.
- X-અક્ષની ઋણ દિશામાં ગતિ કરતાં પદાર્થોનો વેગ $-u'$ છે.

- અથડામણ બાદ $2m'$ દળ ધરાવતા એક જથ્થામાં ફેરવાય છે. અને S' સંદર્ભતંત્રમાં સ્થિર થાય છે.

સ્થિર સંદર્ભતંત્ર S માં મળતું નિરીક્ષણ:

- બંને પદાર્થોના દળ m_1 & m_2 છે.
- m_1 દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણનો વેગ u_1 છે.
- m_2 દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણનો વેગ u_2 છે.
- અથડામણ બાદ $(m_1 + m_2)$ દ્રવ્યમાન ધરાવતો જથ્થો બનશે. જે v વેગથી X-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતો હશે. S' માં આ જથ્થો સ્થિર છે. પરંતુ S'-સંદર્ભતંત્ર એ S ને સાપેક્ષ v વેગથી ગતિ કરે છે.
- હવે સંદર્ભતંત્ર S ના કિસ્સા મુજબ વેગમાન સંરક્ષણનો નિયમ લગાડતા,

અથડામણ પહેલા તંત્ર નું કુલ વેગમાન = અથડામણ બાદ તંત્ર નું કુલ વેગમાન

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2) \cdot v$$
$$m_1u_1 - m_1v = m_2v - m_2u_2$$
$$\therefore \quad m_1(u_1 - v) = m_2(v - u_2)$$
$$\therefore \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{(v - u_2)}{(u_1 - v)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad eqn(1)$$

હવે, વેગોના સરવાળા ના સૂત્ર નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$u_1 = \frac{u' + v}{1 + {u'v}/{c^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad eqn(2)$$
$$u_2 = \frac{-u' + v}{1 - {u'v}/{c^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad eqn(3)$$

ઉપરોક્ત કિમતો સમીકરણ(1) માં લખતા,

$$\therefore \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{v - \left(\dfrac{-u' + v}{1 - u'v/c^2} \right)}{\left(\dfrac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \right) - v}$$

$$\therefore \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{\dfrac{v \cdot \left(1 - u'v/c^2\right) + u' - v}{\left(1 - u'v/c^2\right)}}{\dfrac{u' + v - v\left(1 + u'v/c^2\right)}{1 + u'v/c^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{m_1}{m_2} =$$