Sem-2 (NEP Course-2023), P-201, Unit 1 (Multi B-Group)

(i) ડી.સી. પરિપથ (D.C. Circuit)

(1) અવરોધ R અને પ્રેરક L ધરાવતો સાદો પરિપથ તેમજ તેનાં પ્રવાહની વૃદ્ધિ અને ક્ષય માટે હેલ્મ હોલ્ટ્ઝ સમીકરણ.

(Simple R.L. Circuit Growth and Decay of Current Helmholtz Equation, 11.24): -

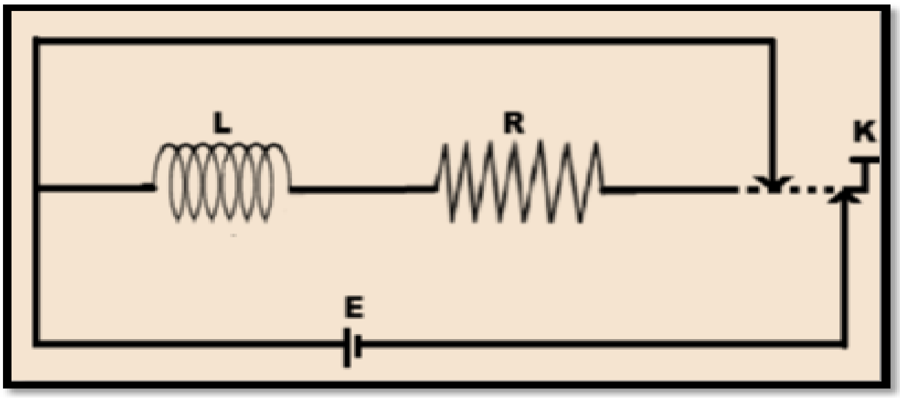


Fig:1

આકૃતિ (૧) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે અવરોધ **R** સાથે શ્રેણીમાં પ્રેરક ગુંચળુ **L** જોડેલ છે. જે બંને કળ **K** દ્વારા સ્થિત વિજચાલક બળ **(emf)** ધરાવતા સ્તોત્ર**(Source)** સાથે જોડાઈ શકે અથવા છૂટા પડી શકે તેવી રચના છે.

❖ પ્રવાહ ની વૃધ્ધિ (Current Growth) :

જ્યારે કાળ **K** ને દબાવવામાં આવે છે ત્યારે અવરોધ **R** માં પ્રવાહ નો વધારો થવા લાગે છે. હવે જો પરિપથમાં પ્રેરક ગુંચળુ **L** આવેલ ન હોય તો, અવરોધ **R** માં કળ **K** દબાવતા ની સાથે જ પ્રવાહ માં એકદમ ઝડપી વૃદ્ધિ થઈ અને પ્રવાહ તેનું મહતમ સ્થિત મૂલ્ય**(static value)** પ્રાપ્ત કરી લેશે. એટલેકે $I_0 = \frac{E}{R}$ પરંતુ અહીં પરિપથમાં ગુંચળુ **L** હાજર હોવાથી ફેરાડે અને લેન્ઝ ના નિયમ મુજબ આત્મક પ્રેરક વીજચાલક બળ $-L\frac{dI}{dt}$ પરિપથમાં ઉદભવશે જે વધતા પ્રવાહ નો વિરોધ કરશે એટલે કે તે વિદ્યુત કોષ ના વીજચાલક બળ **E** નો વિરોધ કરશે.

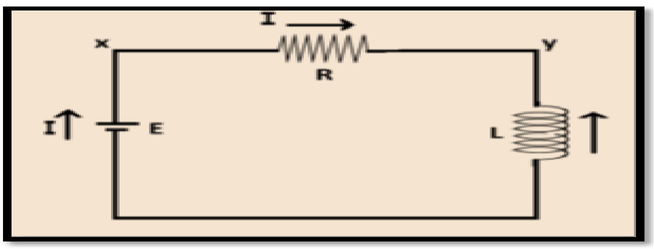


Fig: 2

પરીપથના ઘટકોમાં પ્રવાહની સ્થિતિ જાણવા માટે આકૃતિ-૨ મુજબ વિચારીએ તો તેમાં **y** સ્થાન કરતાં **x** સ્થાન પાસે વીજસ્થિતિમાન નું મૂલ્ય વધારે હશે કારણકે અવરોધ દ્વારા થતો વીજસ્થિતિમાન નો ઘટાડો **IR** જેટલો છે

હવે કિર્ચોફ ના બીજા નિયમ પ્રમાણે.

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$

$$\therefore\ E - IR = L\frac{dI}{dt}$$

$$\therefore\ \frac{dI}{E-IR} = \frac{dt}{L}$$

$$\therefore\ -\frac{dI}{E-IR} = -\frac{R}{L}dt \quad (\because \text{ multiply both sides by R})$$

હવે જો t સમયમાં પ્રવાહ **0** થી I સુધી વધે તો ઉપરના સમીકરણનું તે મર્યાદા ના સંદર્ભમાં સંકલન લેતા,

$$\int_0^I -\frac{RdI}{E-IR} = \int_0^t -\frac{Rdt}{L}$$

Or $$|log_e(E - IR)|_0^I = -\frac{Rt}{L}$$

Or $$log_e\frac{E-IR}{E} = -\frac{R}{L}t$$

Now taking Antilog,

$$\frac{E - IR}{E} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

Or $$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Or $$\boxed{I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad \dots\dots\dots \text{eqn } (1)}$$

સમી. **(1)** માં $I_0 = \frac{E}{R}$ કે જે પ્રવાહ નું મહત્તમ મૂલ્ય દર્શાવે છે. સામી. **(1)** એ પ્રવાહ ની વૃદ્ધિ નું સમીકરણ છે; જે કોઈપણ ક્ષણે પ્રવાહ નું મૂલ્ય આપે છે.

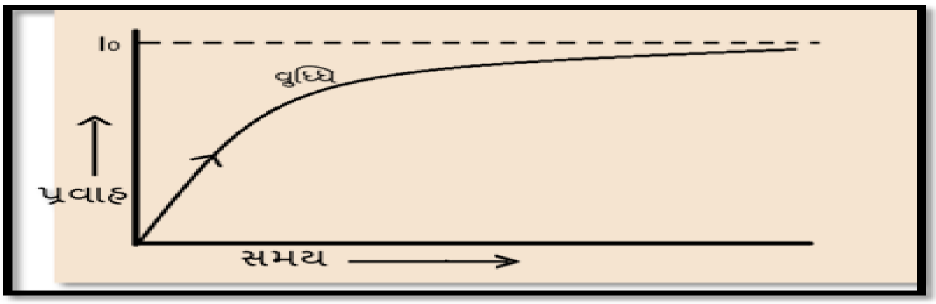


Fig: 3

આકૃતિ(3) માં નો વૃદ્ધિ વક્ર એ પ્રવાહ I ચારઘાતાંકીય રીતે I_0 એ પહોંચે છે તે દર્શાવેલ છે.

હવે, પ્રવાહ ના વધારાનો દર શોધવા માટે સમી. (1) નું વિકલન લેતા

$$\frac{dI}{dt} = \frac{R}{L} I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \qquad \text{(સામી.-1 નું સાદુરૂપ આપતા)}$$

$$= \frac{R}{L} (I_0 - I) \quad \ldots\ldots\ldots \text{eqn } (2)$$

સમી. (2) પરથી પૂરવાર કારી શકાય કે જેમ પ્રવાહ I એ તેના મહત્તમ મૂલ્ય I_0 એ પહોંચે છે તેમ પ્રવાહ ની વૃદ્ધિ નો દર ધીમો પડતો જાય છે. કારણ કે પ્રવાહ ની વૃદ્ધિ ની સાથે આત્મપ્રેરિત વીજચાલક બળ $-L\frac{dI}{dt}$ નું મૂલ્ય ઘટતું જાય છે. જેને કારણે પરિપથ માં પ્રવાહ વધારાની સમય વિલંબિત (time delay) અવસ્થા ઉદભવે છે. તેથી પ્રવાહ ના મૂલ્ય ને I_0 સુધી પહોંચવા માટે ખૂબજ લાંબી અવધિ પસાર કરવી પડે છે.

સમી. (1) ને આપણે નીચે મુજબ લખી શકીએ.

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) \quad \ldots\ldots\ldots \text{eqn } (3))$$

સમી.-(3) માં એ ગુણોત્તર L/R છે. જેને પ્રેરિત સમય નિયતાંક (Induction time constant) કહેવામાં આવે છે.

અહીં $\lambda = \frac{L}{R}$ ને આપણે સમય નિયતાંક કહીએ છીએ કારણકે તે સમય નો પ્રમાણ આંક ધરાવે છે.

$$\lambda = \frac{L}{R} = \frac{Henry}{Ohm} = \frac{\frac{Volt}{\frac{Ampere}{Second}}}{Ohm} = \frac{Volt}{\frac{Ampere}{Second} * Ohm} = \frac{Volt * Second}{Ampere * Ohm} = \frac{Volt * Second}{Volt} = Second$$

સમય નિયતાંક નું ભૌતિક અર્થઘટન સમી.(3) પરથી સમજી શકાય છે. જો આપણે સમી.(3) માં $t = \frac{L}{R}$ મૂકીએ તો,

$$I = I_0 (1 - e^{-1})$$

$$\frac{I}{I_0} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} = \frac{1.718}{2.718} = 0.63$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{2}{3} \; approx. \quad \ldots\ldots\ldots eqn \; (4)$$

તેથી સમય નિયતાંક λ એ પરિપથમાં પ્રવાહ ને તેના અંતિમ મૂલ્યના 2/3 ભાગ સુધી પહોંચવા માટે લાગતો સમય દર્શાવે છે. પ્રવાહ ની વૃદ્ધિ નો દર એ સમય નિયતાંક λ પર આધારિત હોય છે જે નીચેની આકૃતિ-4 માં દર્શાવેલ છે. આકૃતિ-4 પરથી જોતા જણાય છે કે **જેમ સમય નિયતાંક λ વધારે તેમ પ્રવાહ ની વૃદ્ધિનો દર ધીમો હોય છે.** **(MCQ)**

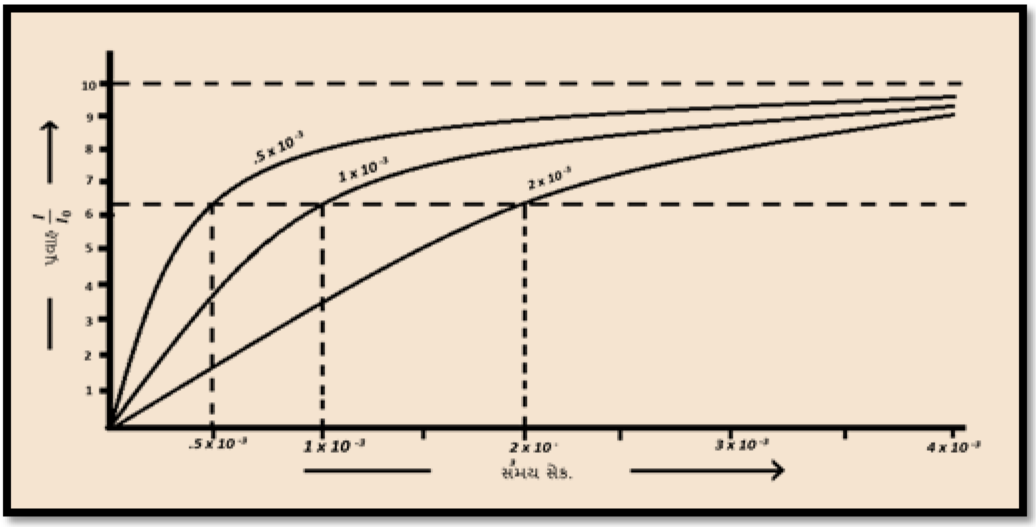


Fig:4

❖ પ્રવાહ નો ક્ષય (Decay of Current) :

હવે જો આકૃતિ-1 માં દર્શાવેલા પરિપથ ની કળ K છોડવામાં આવે તો પરિપથ માંથી વિજચાલક બળ દૂર થઈ જશે. તેથી પરિપથ -1 માટે નીચે મુજબ સમીકરણ મળશે.

$$L\frac{dI}{dt} + IR = 0$$

$$\text{Or} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\,dt$$

આ કિસ્સામાં પણ વિજપ્રવાહ I_0 માં ફેરફાર થતો હોવાથી ફરી પ્રેરક ગુંચળામાં આત્મપ્રેરક વિજચાલક બળ ઉત્તપન્ન થશે જે પ્રવાહ ના ઘટાડાનો વિરોધ કરશે.

તેથી, પ્રવાહ ના અંતિમ મૂલ્ય I_0 થી પ્રવાહ ઘટવાનો ચાલુ થાય તો અમુક સમય t બાદ તેનું મૂલ્ય I જેટલું થશે. તેથી તે સીમાને ધ્યાનમાં રાખી ઉપરના સમીકરણ નું સંકલન લેતા.

$$\int_0^I \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{R}{L}\,dt$$

$$\therefore \quad log_e \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}\,t$$

$$\therefore \quad I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad \ldots\ldots\ldots EQN\ (5)$$

સમી.(5) એ પરિપથ મા થતો પ્રવાહનો ક્ષય દર્શાવે છે. સમી.(-5) એ સમી.- (1) ને સમકક્ષ છે.

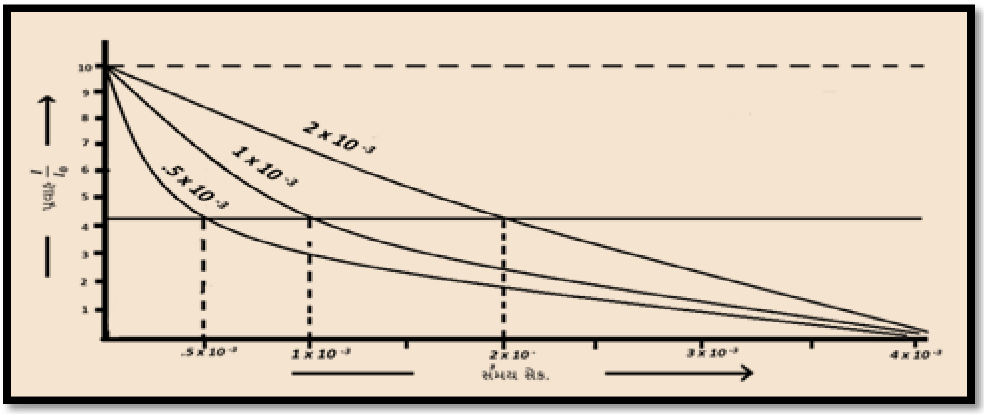


Fig:5

આકૃતિ-(5) એ પ્રવાહના ક્ષય નો વક્ર(Curve) દર્શાવે છે. અહીં ફરી પાછું પ્રવાહ ના ક્ષય નો દર એ સમય નિયતાંક $\lambda = \frac{L}{R}$ પાર આધારિત છે. અને **જેમ λ નું મુલ્ય વધારે તેમ પ્રવાહ ના ઘટાડાનો દર ધીમો હોય છે.** જે આકૃતિ-(5) માં દર્શાવેલ છે.

Example-1

જો એક ગૂંચળાનું પ્રેરકત્વ 50 Henry હોય અને તેની સાથે જોડાયેલ અવરોધ નું મૂલ્ય 30 Ohm હોય અને જો આ બન્ને ઘટક ને 100 Volt ની બેટરી સાથે જોડવામાં આવે તો તેથી બનતા પરિપથમાં વહેતો પ્રવાહ તેના અંતિમ મૂલ્ય કરતા અડધું મૂલ્ય કેટલા સમય માં પ્રાપ્ત કરશે.(If the inductance of a coil is 50 Henry and the value of resistance connected to it is 30 Ohm and if these two components are connected to a battery of 100 Volt, in what time will the current flowing in the resulting circuit reach half of its final value.)

આપણે પ્રવાહની વૃદ્ધિનું સમીકરણ જાણીએ છીયે કે,

$$\boxed{I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

હવે, અહીં **R = 30Ω , L = 50H** તેમજ પ્રવાહ ના અંતિમ મૂલ્ય નું અડધું મૂલ્ય એટલેકે $\frac{I_0}{2}$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} = \left[1 - e^{-\frac{30}{50}t}\right]$$

$$\therefore \quad e^{-\frac{3}{5}t} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad e^{\frac{3}{5}t} = 2$$

$$\therefore \quad \frac{3}{5}t = \log_e 2 = 2.303\log_{10} 2 \quad \therefore \quad t = \frac{5}{3}\,(0.69) = 1.2\ Second$$

એટલે પ્રવાહ તેના અંતિમ મૂલ્ય કરતા અડધું મૂલ્ય 1.2 સેકન્ડ મા પ્રાપ્ત કરશે.

(1) અવરોધ અને સંગ્રાહક ધરાવતો પરિપથ. (R.C. Circuit, 11.25):

અહીં આપણે એક એવો પરિપથ વિચારીએ કે જે નીચેની આકૃતિ (5) મા દર્શાવ્યા પ્રમાણે વિજચાલક બળ E સાથે સંગ્રાહક C અને અવરોધ R ધરાવતો હોય.

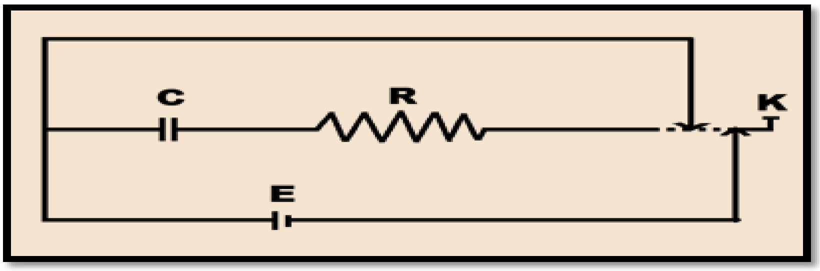


Fig:6

❖ સંગ્રાહક નું વિજભારણ અથવા સંગ્રાહકમા વિજભાર ની વૃદ્ધિ. : (Charging of Condenser):

ઉપરના પરિપથ મા જ્યારે કળ K ને દબાવવામાં આવશે ત્યારે સંગ્રાહક વિજભારીત થશે. સંગ્રાહક ને કારણે પરિપથ માંથી વહેતો પ્રવાહ સમય ની સાથે બદલાશે.

હવે, જો કોઈ એક ક્ષણે સંગ્રાહક ના બે છેડા વચ્ચેનો વિદ્યુતવિભાવ V હોય તો તે વિદ્યુતવિભાવ V એ જોડવામાં આવેલા વિદ્યુતબળ E નો વિરોધ કરશે.

હવે, કોઈ ક્ષણે પરિપથ માંથી વહેતો પ્રવાહ નીચે મુજબ થશે.

$$I = \frac{E - V}{R}$$

Or $\quad E = V + RI$

But, $\quad I = \frac{dQ}{dt} \quad and \quad V = \frac{Q}{C}$

જયાં Q એ સંગ્રાહક પરનો વિજભાર છે.

$$\therefore \quad R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

$$\therefore \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R} - \frac{Q}{RC} = \frac{EC-Q}{RC}$$

$$\therefore \quad -\frac{dQ}{EC-Q} = -\frac{dt}{RC} \quad \ldots\ldots\ldots eqn(6)$$

હવે, જો સંગ્રાહક 0 થી t જેટલા સમય માં 0 થી Q જેટલો વિજભાર પ્રાપ્ત કરે તો સમી.(6) નું તેને સાપેક્ષ સંકલન કરતા.

$$\int_0^Q -\frac{dQ}{EC-Q} = \int_0^t -\frac{dt}{RC}$$

$\therefore \quad |log_e EC - Q|_0^Q = \frac{t}{RC} \qquad \therefore \quad \frac{log_e EC-Q}{EC} = -\frac{t}{RC} \qquad \therefore \quad \frac{EC-Q}{EC} = e^{-\frac{t}{RC}}$

$\therefore \quad EC - Q = ECe^{-\frac{t}{RC}} \qquad \therefore \quad Q = EC\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

$$\therefore \quad Q = Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \ldots\ldots\ldots eqn\,(7)$$

અહીં $Q_0 = EC$ છે. કે જે પરિપથ ને લાગુ પાડવામાં આવેલ વિજચાલક બળ e.m.f. જેટલાજ મૂલ્ય નો વિજભાર સંગ્રાહક પાર સ્થાપિત થાય તે મૂલ્ય દર્શાવે છે. સમી.(7) એ સંગ્રાહક પર ના વિજભાર ની વૃદ્ધિ દર્શાવે છે. અને સમી.(7) પરથી કહી શકાય કે સંગ્રાહક પરની વિજભાર ની વૃદ્ધિ એ ચરઘાતાંકીય છે જે નીચેની આકૃતિ (7) માં દર્શાવેલ છે.

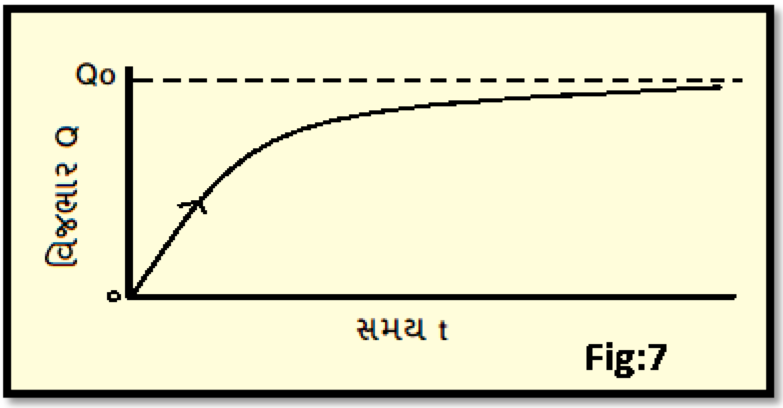


Fig:7

❖ પ્રવાહ: (The Current):

હવે, આપણે જાણીએ છીએ કે પ્રવાહ $I = \frac{dQ}{dt}$, તેથી ઉપરના સમી. (7) નું વિકલન લેતા વિજભાર ને લીધે મળતો પ્રવાહ મળશે.

$$\therefore \quad I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left[Q_0\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\right]$$

$$= Q_0 \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$= \frac{EC}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (\because \quad Q_0 = EC\,)$$

$$= \frac{E}{C}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$\therefore \quad I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \ \ldots\ldots\ldots\ eqn\,(8) \ \ (\because \ \ I_0 = \frac{E}{R})$

સમી.(7) અને સમી. (8) માં આવેલ ઘટક **RC** ને સમય નું પ્રમાણ છે અને તેથી તેને સંગ્રાહક સમય નિયતાંક **(capacitive time constant)** કહેવામાં આવે છે.

કારણ કે,

$$RC = Ohm * Farade = Ohm * \frac{Coloumb}{Volt} \quad (\because\ C = \frac{q}{V})$$

$$= \frac{Coloumb}{Ampere} \quad (\because\ Ohm = \frac{Volt}{Ampere})$$

$$= Second \quad (\because\ Ampere = \frac{Coloumb}{Second})$$

જો આપણે સમી.(7) માં **t = RC** મુકીએ તો,

$$Q = Q_0(1 - e^{-1})$$

$$Q = 0.63Q_0$$

તેથી સંગ્રાહક સમય નિયતાંક **RC** એ પ્રવાહ ને તેની અંતિમ તટસ્થિકરણ અવસ્થા કરતા ૨/૩ ભાગ જેટલી વિજભાર વૃદ્ધિ માટેનો સમય દર્શાવે છે.

❖ સંગ્રાહક ના વિજભાર નો ક્ષય: (Discharge of Condenser):

હવે, કળ **K** ને છોડતા બાહ્ય વિજચાલક બળ **e.m.f.** પરિપથ માંથી દૂર થશે તેથી વિજભારીત થયેલ સંગ્રાહક એ અવરોધ **R** દ્વારા વિજભાર વિહીન થશે. તેથી વિજચાલક બળ માટેનું સમીકરણ નીચે મુજબ થશે.

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\therefore \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \ \ldots\ldots\ldots\ eqn(9)$$

જો t જેટલા સમય મા સંગ્રાહક નો વિજભાર Q_0 થી Q જેટલો ઘટે તો **t** જેટલા સમય બાદ Q નું મૂલ્ય ઉપરના સમીકરણ **(9)** નું તે અંતરાલ મા સંકલન કરતા પ્રાપ્ત થશે.

તેથી,

$$\int_0^Q \frac{dQ}{Q} = \int_0^t -\frac{dt}{Rc}$$

$$\therefore \ log_e \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ eq^{n.}(A)$$

Antilog લેતા, $$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{\lambda}} \ \ldots\ldots\ldots\ eqn\ (10)$$

સમી.(10) માં λ એ સમય નિયતાંક છે જેનું મૂલ્ય RC છે. સમી. (10) એ સંગ્રાહક પરના વિજભાર નો ક્ષય દર્શાવે છે. અને તે પરથી કહી શકાય કે સંગ્રાહક પરના વિજભાર નો ક્ષય ચારઘાતાંકીય છે. ક્ષય માટે પ્રવાહ મેળવવા સમી.(10) નું વિકલન લેતા.

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left[Q_0\, e^{-\frac{t}{RC}}\right]$$

$$= -\frac{Q_0}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I = -I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \;\ldots\ldots\ldots\; eqn\,(11)$$

સમી.(8) અને (11) પરથી કહી શકાય કે જ્યારે t = 0 હશે ત્યારે વૃદ્ધિ માટે પ્રવાહ I_0 હશે અને ક્ષય માટે પ્રવાહ $-I_0$ હશે.

નીચેની આકૃતિમા વૃદ્ધિ અને ક્ષય દરમ્યાન પ્રવાહ નો ફેરફાર દર્શાવેલ છે. જે સમય ની સાપેક્ષ ચારઘાતાંકીય વર્તુણક દર્શાવે છે.

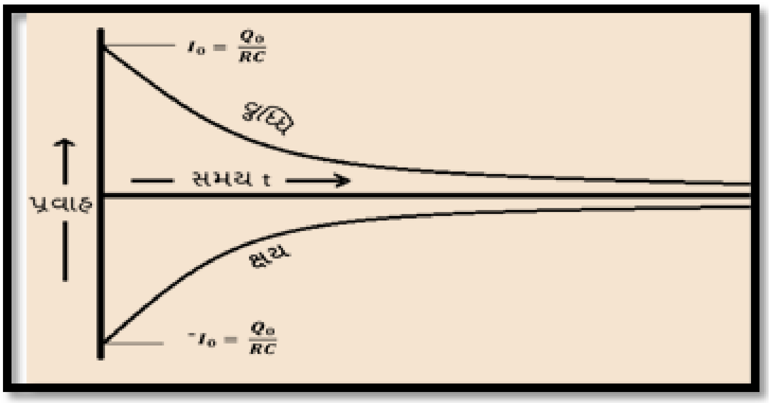


Fig:8

❖ વૃધ્ધિ દરમિયાન સંગ્રાહકમાં સંગ્રહાતી શક્તિ :
(Energy stored in the capacitor during charging:

સંગ્રાહક માં સંગ્રહાતી શક્તિ નું ગુણવત્તા સમીકરણ મેળવવા જો આપણે સંગ્રાહક પરના વીજભાર ની એક અલગ વૃદ્ધિ dq ધ્યાનમાં લઇ એ તો તેમાટે કરવું પડતું સૂક્ષ્મ કાર્ય નીચે મુજબ થશે.

$$dU_E = \frac{q}{C}\,dq$$

અને આ કાર્ય થવાથી પ્રણાલી ની સ્થિતિ શક્તિમાં વધારો થશે. જો આ જ પ્રકારની ક્રિયા કરતા સંગ્રાહક પર Q જેટલો વીજભાર સ્થપાય ત્યાં સુધી કરતા જઈએ તો તે માટે કરવું પડતું કાર્ય નીચે મુજબ થશે.

$$U_E = \int dU_E = \int_0^Q \frac{q}{c} dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Or

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \dots\dots\dots eqn\,(12)$$

જે વિજભારીત સંગ્રાહક પરની કુલ શક્તિ થશે.

❖ સંગ્રાહક ના વિજભારણ દરમ્યાન શક્તિ નો વ્યય:

(Dissipation of energy during charging of Capacitor):

હવે, જો આપણે સંગ્રાહક ના વિજભારણ દરમ્યાન અવરોધ **R** મા થતા શક્તિ ના વ્યય ની ગણતરી કરીએ તો, આપણે સમિકરણ –(7) પરથી જાણીએ છીએ કે,

$$Q = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$and \quad I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

હવે, જો સમય **dt** માં શક્તિ નો વ્યય **dW** હોય તો.

$$dW = I^2 R dt$$

$$= \frac{Q_0^2}{R^2C^2} e^{-\frac{2t}{RC}} dt$$

સંગ્રાહક ના વિજભારણ દરમ્યાન સંગ્રાહક જ્યારે તેના વિજભાર નું મહત્તમ મૂલ્ય પ્રાપ્ત કરે તે દરમ્યાન થતો શક્તિ નો વ્યય મેળવવા માટે ઉપરના સમીકરણ નું સંકલન લેતા,

$$W = \int dW = \frac{Q^2}{C^2R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$W = \frac{1}{2} QE \dots\dots\dots eqn\,(13)$$

સમી.**(13)** પરથી કહી શકાય કે શક્તિ **R** ના મૂલ્ય પાર આધારિત નથી

અહીં **D.C.** ઉદ્દભવસ્થાન દ્વારા આપવામાં આવતી શક્તિ QE છે. અને તેમાંથી સંગ્રાહક માં સંગ્રહાતી શક્તિ $\frac{1}{2} QE$ છે અને વ્યય થતી શક્તિ $\frac{1}{2} QE$ છે.

(1) લિકેજ ની રીત દ્વારા ગુરૂઅવરોધ નું માપન:
(Measurement of High Resistance by the Method of Leakage, 11.26) :

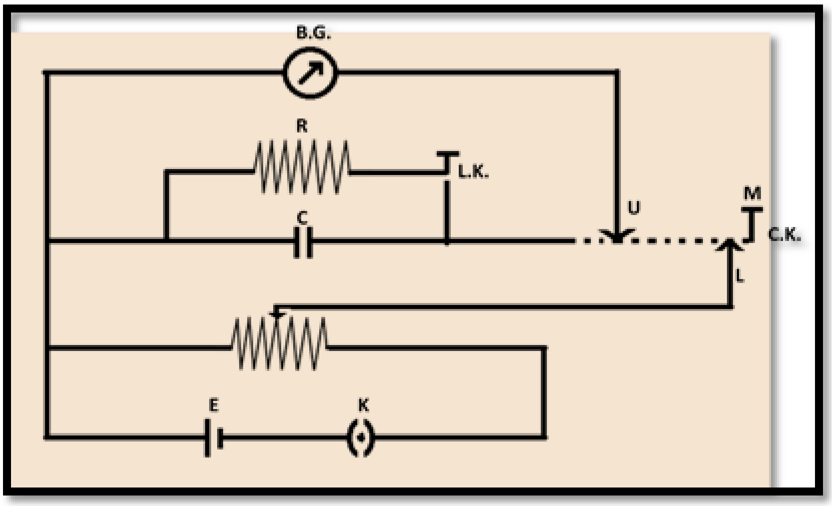


Fig:9

સમી. (A) $log_e \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$ નો ઉપયોગ કરી $10^6\Omega$ જેટલા ક્રમ ના ગુરૂઅવરોધ નું મૂલ્ય શોધી શકાય છે. જે માટે આકૃતિ (9) માં દર્શાવ્યા મુજબ કળ **C.K.** દબાવી **M** અને **L** જોડાતા, સંગ્રાહક Q_0 મૂલ્ય સુધી વિજભાર ધારણ કરે તે રીતે ચાર્જ કરવામાં આવે છે. એટલેકે તેની બે પ્લેટ વચ્ચે વીજસ્થિતિમાન નો તફાવત V_0 સ્થપાય છે. ત્યારબાદ **C.K.** કળ ને છોડતા **U** અને **M** જોડાશે અને સંગ્રાહક બેલેસ્ટિક ગેલવેનોમીટર (**B.G.**) દ્વારા ડિસચાર્જ થશે અને તેથી **B.G.** માં θ_0 જેટલું આવર્તન જોવા મળશે. જે θ_0 નું મૂલ્ય નોંધવામાં આવેછે. ત્યારબાદ સંગ્રાહક ને ફરી કળ **C.K.** દ્વારા **M** અને **L** જોડી ફરી પાછું Q_0 મૂલ્ય સુધી ચાર્જ કરવામાં આવે છે. અને ત્યારબાદ **C.K.** કળ ને ખુલ્લી રાખી લીકેજ **L.K.** કળ દ્વારા સંગ્રાહક **C** ને અવરોધ **R** સાથે અમૂક નિશ્ચિત સમય **t** સુધી જોડવામાં આવેછે જેથી સંગ્રાહકના વીજસ્થિતિમાન માં ઘટાડો થઈ અને તે V_0 થઈ ઘટી V_1 મૂલ્ય

પ્રાપ્ત કરશે, કરણ કે અવરોધ **R** દ્વારા સંગ્રાહક ના વિજભારમાં ઘટાડો થાય છે. ત્યારબાદ સંગ્રાહક પાર બાકી રહેલા વિજભાર ને કળ **C.K.** દ્વારા **U** અને **M** જોડી **B.G.** માંથી પસાર કરતા બેલેસ્ટિક ગેલવેનોમીટર મા θ_1 આવર્તન થશે જે નોંધવામાં આવે છે.

હવે, બેલેસ્ટિક ગેલવેનોમીટર ના અભ્યાસ દ્વારા આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$Q_0 = CV_0 = K\theta_0(1 + \frac{\lambda}{2})$$

Or $$Q_1 = CV_1 = K\theta_1(1 + \frac{\lambda}{2})$$

$$\therefore \quad \frac{Q_0}{Q_1} = \frac{V_0}{V_1} = \frac{\theta_0}{\theta_1} \ldots\ldots\ldots eqn\ (14)$$

હવે, સમી.(10) મુજબ આપણે જાણીએ છીએ કે સંગ્રાહક પરના વિજભારના ક્ષય માટે,

$$Q_1 = Q_0 e^{-t/RC}$$

જયાં Q_1 એ; **t** જેટલા સમય માં અવરોધ **R** માંથી લીકેજ થયેલ પ્રવાહ પછી સંગ્રાહક પરનો વિજભાર છે.

$$\frac{Q_0}{Q_1} = e^{\frac{t}{RC}}$$

$$\therefore \quad \frac{t}{RC} = log_e \frac{Q_0}{Q_1}$$

$$\therefore \quad \frac{t}{RC} = log_e \frac{\theta_0}{\theta_1} \quad (\because \ from\ eq^{n.} 14)$$

$$\therefore \quad R = \frac{t}{C\ log_e \frac{\theta_0}{\theta_1}} = \frac{t}{2.303\ C\ log_{10} \frac{\theta_0}{\theta_1}} \ \ldots\ldots\ldots eqn\ (15)\ )$$

તેથી સમય **t** , θ_0 અને θ_1 ના મૂલ્યો મેળવી અને અવરોધ **R** નું મૂલ્ય સમી.(15) મુજબ ગણી શકાય છે.

આ રીતે જુદા જુદા સમય **t** માટે સંગ્રાહક ને અવરોધ **R** દ્વારા લીક કરવામાં આવે છે અને તે દરેક સમય **t** ને અનુરૂપ θ_0 અને θ_1 ના મૂલ્યો નોંધવામાં આવે છે. અને ત્યારબાદ જો સમય **t** વિરૂદ્ધ $log_{10}\frac{\theta_0}{\theta_1}$ નો આલેખ દોરવામાં આવે તો તે નીચેની આકૃતિ-10 માં દર્શાવ્યા મુજબ સુરેખ મળે છે. અને જો તેનો ઢાળ શોધવામાં આવે તો તે અવરોધ **R** નું મૂલ્ય આપશે.

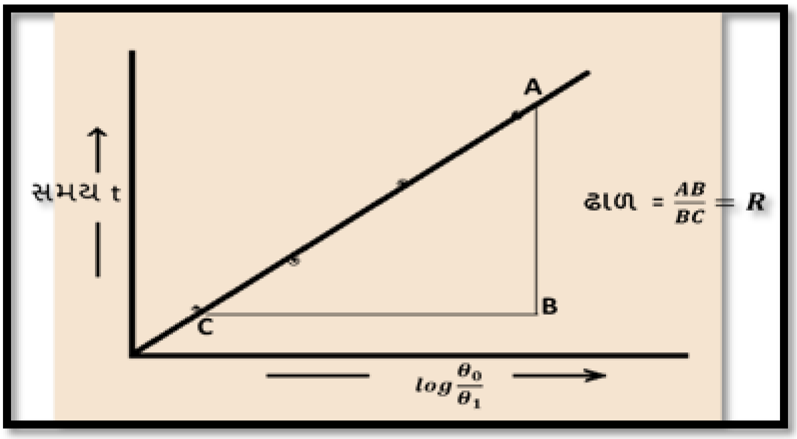


Fig:10

➢ શા માટે ફક્ત ગુરૂઆવરોધજ આ રીત દ્વારા શોધવામાં આવે છે?

(Why only high resistance finding only this method):-

અહીં ઉપર દર્શાવેલ પ્રાયોગિક રીત ફક્ત ગુરૂઅવરોધ શોધાવાજ ઉપયોગી છે. કારણ કે જો પરિપથમાં અવરોધ **R** નું મૂલ્ય નાનું હોય તો સમય નિયતાંક **RC** નું મૂલ્ય પણ ઘણું નાનું મળશે. તેથી સંગ્રાહક ના વિજભાર Q ના થોડા ભાગને અવરોધ **R** માંથી લીક કરવા માટેનો સમય ખુબજ નાનો થઈ જશે. અને તે સમય એટલો નાનો હોય છે કે જેનું માપન કરવું શક્ય નથી કારણ કે જેવી કળ **L.K.** દબાવવામાં આવે કે તુરતજ અવરોધ **R** દ્વારા સંગ્રાહક પરનો બધોજ વિજભાર લીક થઈ જશે. તેથી જો **RC** સમય નિયતાંક વધુ હોય તેજ સંગ્રાહક પરના વિજભાર નો થોડો ભાગ માપી શકાય તેવા સમયમાં અવરોધ **R** દ્વારા લીક કરી શકાય. માટે **RC** નું મૂલ્ય વધારવા **R** વધારે મૂલ્યનો લેવામાં આવેછે.તેથી આ પ્રયોગ પદ્ધતિ થી ફક્ત ગુરૂઆવરોધ જ માપવો શક્ય છે.

❖ સંગ્રાહક દ્વારા થતો વિજભાર નો વ્યય:

(Self-Leakage through Condenser):

સંગ્રાહક ની બે પ્લેટો વચ્ચે આવેલ અવહાક માધ્યમ કદાચ સંપૂર્ણ અવાહક ના હોય તો તેના દ્વારા વિજભાર નો વ્યય થાય છે. તેથી સંગ્રાહક ને અવરોધ સાથે જોડાયા વગર પણ વિજભાર નો વ્યય શક્ય બને છે. તેથી સંગ્રાહક દ્વારા થતા સેલ્ફ લીકેજ (આત્મ વ્યય) શોધવા માટે, સૌપ્રથમ સંગ્રાહક ને વિજભારીત કરી અને તરતજ બેલેસ્ટિક ગેલવેનોમીટર દ્વારા ડિસચાર્જ કરવામાં આવે છે. અને તે વખત નું અવલોકન θ_0 નોંધવામાં આવે છે. અને ત્યાર બાદ ફરી સંગ્રાહક ને વિજભારીત કરી અને t_1 જેટલા સમય માટે આત્મ વ્યય થવા માટે રાખવામાં આવે છે. પછી તેને બેલેસ્ટિક ગેલવેનોમીટર દ્વારા વિજભાર વિહીન કરવામાં આવે છે. અને તે માટેનું અવલોકન θ_1 નોંધવામાં આવે છે. હવે, સંગ્રાહકના આત્મ વ્યય માટે નો અવરોધ R_L હોય તો,

$$R_L = \frac{t}{2.303\, log_{10} \frac{\theta_0}{\theta_1}} \quad \dots\dots\dots eqn\ (16)$$

આત્મ વ્યય માટેના અવરોધ R_L ને સંગ્રાહક નો અવહાક અવરોધ પણ કહેવામાં આવે છે. અને પરિપથ માં **R** ને સમાંતર જોડેલો ગણી શકાય. તેથી પરિપથ નો સંગ્રાહક ને સાપેક્ષ પરિણામી અવરોધ જો **R′** કહીએ તો,

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_L} + \frac{1}{R}$$

$$\therefore \quad R' = \frac{RR_L}{R + R_L} \quad \dots\dots\dots eqn\ (17)$$

R' શોધવા માટે, આગળ જોઈ ગયા તે પ્રમાણે સૌપ્રથમ સંગ્રાહકને વિજભારીત કરવામાં આવે છે. ત્યારબાદ તેને જ્ઞાત સમય t_2 સુધી અવરોધ **R** સાથે જોડી અને તેના વિજભારનો વ્યય કરવામાં આવેછે અને બાકી રહેલા વિજભાર ને બેલેસ્ટિક ગેલવેનોમીટર માંથી પસાર કરી અને આવર્તન θ_2 નોંધવામાં આવે છે.

$$R' = \frac{RR_L}{R + R_L} = \frac{t_2}{2.303\ log_{10}\frac{\theta_0}{\theta_1}} \quad \dots\dots\dots eqn\ (18)$$

સમી.(16) દ્વારા R_L અને સમી. (18) દ્વારા **R'** મેળવી અને તેનું મૂલ્ય સમી. (17) મા મૂકી અજ્ઞાત ગુરૂ અવરોધ **R** ની ગણતરી કરી શકાય છે.

(2) ડી'સોટી ની રીત દ્વારા સંગ્રાહક ની ક્ષમતા ની સરખામણી કરવી:
(Comparison of Capacities by De Sauty's Method, 11.27) :

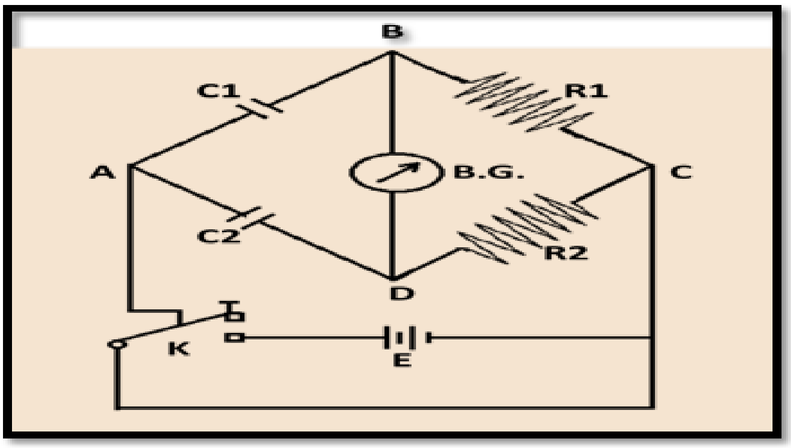


Fig:11

આકૃતિ (11) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે સંગ્રાહક ની ક્ષમતા ની સરખામણી કરવા માટે વ્હિસ્ટન બ્રિજ ના સિધ્ધાંત નો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જેમાં C_1 અને C_2 બે સંગ્રાહક છે, અને R_1 અને R_2 બન્ને મોટા મૂલ્ય નો અવરોધ ધરાવતી અવરોધ પેટીઓ છે. પરિપથ માં તસ્થીકરણ બિંદુ શોધવા માટે બેલેસ્ટિક ગેલવેનોમિટર નો ઉપયોગ કરવામાં આવેલ છે. હવે જ્યારે કળ **K** ને દબાવવામાં આવશે ત્યારે પરીપથ માં બેટરી જોડાશે અને તેથી પરીપથ ના બિંદુ **A** અને **C** વચ્ચે વિદ્યુત-સ્થિતિમાન નો તફાવત સ્થપાશે.અને પરીપથ ની શાખાઓ **ABC** અને **ADC** માથી પ્રવાહ વહેશે. તેને કારણે

પરિપથ માં આવેલ અવરોધો R_1 અને R_2 દ્વારા અંગ્રાહક ચાર્જ થશે. અને જ્યારે કળ **K** ને છોડવામાં આવશે ત્યારે સંગ્રહકો અવરોધ R_1 અને R_2 દ્વારા ડિસચાર્જ થશે. હવે R_1 અને R_2 નું મૂલ્ય એવીરીતે ગોઠવવા માં આવે છે, જેથી ગેલવેનોમિટર નું આવર્તન શૂન્ય મળે. ગેલ્વેનોમિટર નું આવર્તન શૂન્ય થાય એટલેકે બિંદુ **B** અને **D** પાસે વીજસ્થિતિમાન સમાન થશે.

હવે, કોઈપણ ક્ષણ **t** એ વીજભાર નું મૂલ્ય નીચેના સમીકરણ પરથી મળશે.

$$Q = Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \ldots\ldots\ldots eqn\ (19)$$

જ્યાં Q_0 એ વીજભાર નું મહત્તમ મૂલ્ય દર્શાવે છે. એટલેકે મહત્તમ વીજસ્થિતિમાન V_0 એ સંગ્રાહક ચાર્જ થાય ત્યાર નું મૂલ્ય દર્શાવે છે. તેથી ઉપરના સમી. **(19)** દ્વારા કોઈપણ સમયે વીજસ્થિતિમાન **V** નું મૂલ્ય શોધી શકાય.

કારણ કે, $$Q_0 = CV_0$$

તેથી, $$Q = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{Q}{C} = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$\therefore \quad V = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \ldots\ldots\ldots eqn\ (20)$$

હવે, જો સંગ્રાહક ને ચાર્જ કરતી વખતે કોઈપણ ક્ષણ **t** એ બંને સંગ્રાહક પરનો વીજસ્થિતિમાન જો અનુક્રમે V_1 અને V_2 હોય તો સમી.**(20)** પરથી.

$$V_1 = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{R1C1}}\right) \ldots\ldots\ldots eqn\ (21)$$

અને $$V_2 = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{R2C2}}\right) \ldots\ldots\ldots eqn\ (22)$$

પરીપથ માં બંને સંગ્રહકો ની એકબાજુ ની પ્લેટો બિંદુ **A** સાથે જોડાયેલ છે અને બીજી બાજુ ની પ્લેટો **B** અને **D** સાથે જોડાયેલ છે. તટસ્થીકરણ સ્થિતિ માં **B** અને **D** બિંદુઓ સમાન વીજસ્થિતિમાને હશે. તેથી બ્રિજ ના તટસ્થીકરણ માટેની શરત નીચે મુજબ થશે.

$$V_1 = V_2$$

$$V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{R1C1}}\right) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{R2C2}}\right)$$

અને એ ત્યારેજ શક્ય છે.

જો, $$R_1C_1 = R_2C_2$$

એટલેકે પરીપથ **ABC** અને **ADC** નો સમય નીયતાંક સરખો હોય અથવાતો બંને શાખાનો વીજભાર વૃદ્ધિ નો દર સરખો હોય સમી. **(22)** ને નીચે મુજબ પણ લખી શકાય.

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \dots\dots\dots \boldsymbol{eqn}\ (23)$$

(2) આદર્શ LC પરિપથ: (Ideal LC Circuit, 11.28)

અત્યાર સુધી આપણે જે પરિપથ ની ચર્ચા કરી તે પરિપથ આંદોલિત વર્તુણક ધરાવતા ન હતા. પરંતુ હવે પછીના જે પરિપથ ની ચર્ચા કરવાની છે તેમાં આપણે પરિપથ દ્વારા આંદોલિત વિદ્યુત પ્રવાહ ઉત્પન્ન કરવાની શક્યતા પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરવાનું છે. અને એ માટે આપણે નીચેની આકૃતિ**(12)** માં દર્શાવ્યા મુજબ નો ખૂબ જ સરળ પરિપથ ધ્યાનમાં લઈએ કે જે એક આદર્શ સંગ્રાહક અને પ્રેરક નો બનેલો હોય. આદર્શ સંગ્રાહક અને આદર્શ પ્રેરક એટલે કે તે બંને ઘટકો કોઈ અવરોધ ધરાવતા નથી.

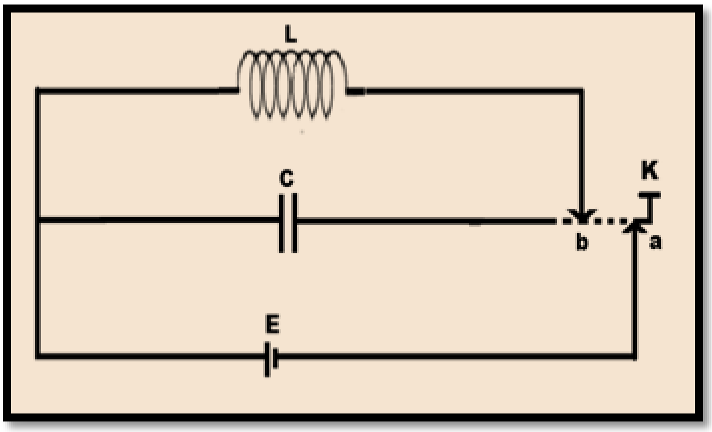


Fig:12

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબના પરિપથમાં જ્યારે કળ **K** દબાવવામાં આવે છે. ત્યારે કળ **K** એ **a** સાથે જોડાતા સંગ્રાહક **C** વીજચાલક બળ **E** સાથે જોડાવાથી ચાર્જ થશે. ત્યારબાદ કળ **K** ને છોડતા તે **b** સાથે જોડાવાથી સંગ્રહ **C** એ પ્રેરક **L** સાથે જોડાશે અને તેથી સંગ્રાહક **C** એ પ્રેરક દ્વારા ડિસ્ચાર્જ થશે. અહીં આપણે સંગ્રાહક **C** ના પ્રેરક **L** દ્વારા થતા ડિસ્ચાર્જ ના કિસ્સાને જ ધ્યાનમાં લઈએ તો ડિસ્ચાર્જની સ્થિતિમાં કિર્ચોફના બીજા નિયમ મુજબ,

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

હવે, $I = \frac{dQ}{dt}$ તેથી.

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0 \quad \dots\dots\dots eqn\ (24)$$

સમી.(25) એ વિકલ સમીકરણ છે જે સમયને સાથે વીજભાર માં થતો ફેરફાર દર્શાવે છે. સમીકરણ (25) એ સાદી પ્રસંમવાદી ગતિ કરતી વજનધારીત સ્પ્રિંગ ની ગતિના સમીકરણ જેવું છે. વજનધારીત સ્પ્રિંગ નું પ્રસંમવાદી ગતિનું સમીકરણ નીચે મુજબ છે.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

જ્યાં ω એ અવમંદન રહિત વજનધારીત સ્પ્રિંગ ની કુદરતી આવૃત્તિ છે.

જ્યાં, $\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{K}{m}}$

તેથી L.C. પરિપથ એ વજનધારિત સ્પ્રિંગની પ્રણાલી જેવી જ સાદી ગતિ ધરાવતો પરિપથ છે તે વધારે સ્પષ્ટ રીતે સમજવા આપણે નીચે મુજબ બંનેની સરખામણી કરી શકીએ.

	યાંત્રિક પ્રણાલી		વીજચુંબકીય પરિપથ
સ્પ્રિંગ	$U_P = \frac{1}{2}Kx^2$	સંગ્રાહક	$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
દળ (વજન)	$U_K = \frac{1}{2}mv^2$	પ્રેરક	$U_B = \frac{1}{2}LI^2$
	$v = \frac{dx}{dt}$		$I = \frac{dq}{dt}$

સરખામણી કરતાં જણાય છે કે સંગ્રાહક સ્પ્રિંગની જેમ જ વર્તે છે અને પ્રેરક વજન ની જેમ વર્તે છે અને તદ ઉપરાંત વિજચુંબકિય ઘટક એ કેટલાક યાંત્રિક ઘટકોને સમરૂપ છે જેમકે,

q એ x સાથે સંકળાયેલ છે.

I એ v સાથે સંકળાયેલ છે.

C એ $\frac{1}{K}$ સાથે સંકળાયેલ છે.

L એ m સાથે સંકળાયેલ છે.

વજનધારીત સ્પ્રિંગ ના દોલનો માં શક્તિ બે અવસ્થા રૂપે સંકળાયેલ હોય છે; ગતિશક્તિ અને સ્થિતિશક્તિ. તેજ રીતે **L.C.** પરિપથમાં તે વિદ્યુતશક્તિ અને ચુંબકીયશક્તિ રૂપે સંકળાયેલ હોય છે. તેથી સમીકરણ(25) નું સોલ્યુશન આપણે નીચેના યાંત્રિક સમીકરણ મુજબ મેળવી શકીએ.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

અને તે મુજબ મળતું સમીકરણ **(25)** નું સોલ્યુશન થશે,

$$Q = Q_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ \_\_\_\_\_\_\_ eq}^{n.} (26)$$

જ્યાં Q_m એ અચળાંક છે અને તે વીજભાર નું મહત્તમ મૂલ્ય દર્શાવે છે. ω એ દોલનો ની કોણીય આવૃત્તિ છે. અને φ એ સ્વતંત્ર અચળાંક છે.

જો સમી.**(26)** એ સમી. **(25)** નું સોલ્યુશન છે કે નહીં તે ચકાસવું હોય તો સમી. **(25)** માં Q અને $\frac{d^2Q}{dt^2}$ નું મૂલ્ય મૂકી જાણી શકાય.

$$\therefore \quad \frac{dQ}{dt} = I = -\omega Q_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{અને} \quad \frac{d^2Q}{dt^2} = -\omega^2 Q_m \cos(\omega t + \varphi)$$

સમી.**(25)** માં ઉપરના મૂલ્યો મૂકતાં,

$$-L\omega^2 Q_m \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C} Q_m \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

તો, $$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ eq}^{n.} (27)$$

અને કલા તફાવત φ એ પ્રારંભિક સ્થિતિ પરથી મેળવી શકાય છે. સમી.**(27)** દર્શાવે છે કે Q એ $\pm Q_m$ ની મર્યાદા વચ્ચે સાઈન વેવ આકારે દોલન કરે છે. અને તેનો આવર્તકાળ નીચે મુજબ હશે. $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC} \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ eq}^{n.} (28)$$

અને આવૃત્તિ, $$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ eq}^{n.} (29)$$

અને પરીપથ માંથી વહેતો પ્રવાહ નીચે મુજબ થશે.

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega\, Q_m \sin(\omega t + \varphi) \text{ \_\_ eq}^{n.}(30)$$

સમી.(30) દર્શાવે છે કે પરિપથ માંથી વહેતો પ્રવાહ પણ દોલિત હશે અને તેની આવૃત્તિ વીજભાર ના દોલનોની આવૃત્તિ જેટલીજ હશે.

(3) શ્રેણી L.C.R. પરીપથ :(વૃદ્ધિનો કીસ્સો)
(Series LCR circuit – Charging case, 11.29)

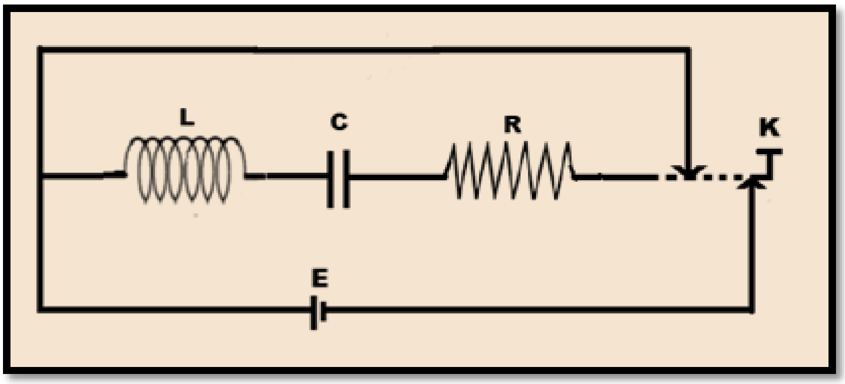


Fig:13

ઉપરની આકૃતિ (13) માં દર્શાવ્યા મુજબના પરિપથ ને ધ્યાનમાં લઈએ કે જેમાં પ્રેરક **L**, સંગ્રાહક **C**, અને અવરોધ **R** ને એક સ્થિત વીજચાલક બળ **E** સાથે જોડેલ હોય. હવે જો આવા પરીપથ ની બદલાતી અવસ્થાઓ નું પૃથક્કરણ કરવું હોય તો કિર્ચોફ ના બીજા નિયમ મુજબ પરિપથમાં જો **I** જેટલો પ્રવાહ વહેતો હોય અને કોઈ તત્કાલ સમય **t** એ પરિપથમાં લાગુ પાડવામાં આવેલ વીજ ચાલક બળ નીચે મુજબ થશે.

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI = E$$

પરંતુ, $I = \frac{dQ}{dt}$ તેથી,

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = \frac{E}{L}$$

અથવા $$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2b\frac{dQ}{dt} + K^2Q = \frac{E}{L} \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_ eq}^{n.}(31)$$

જ્યાં $2b = \frac{R}{L}$ અને $K^2 = \frac{1}{LC}$

સમી.(31) ને નીચે મુજબ લખતાં

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2b\frac{dQ}{dt} + K^2\left(Q - \frac{E}{K^2L}\right) = 0 \text{ \_\_\_\_ eq}^{n.}(32)$$

હવે જો $Q - \frac{E}{K^2L} = x$ મૂકીએ તો, __________ eq$^{n.}$ (33)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad \text{અને} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2Q}{dt^2}$$

આ કિંમતો સમી.(32) માં મૂકતાં,

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2b\,\frac{dx}{dt} + K^2x = 0$$ _________ eq$^{n.}$ (34)

સમી.(34) એ અવમંદિત પ્રસંવાદી દોલાનોની ગતી ના સમી. જેવુજ છે. તેથી વિકલ સમીકરણ કે જે દ્વિઘાત સમીકરણ જેવાજ સ્વરૂપનું હોય તો તેનો એક ઉકેલ નીચેમુજબ નો હોય છે.

$$x = e^{\alpha t}$$ __________ eq$^{n.}$ (35)

અને તેને નિશ્ચિત ક્રમાંક કહેવાય છે. જ્યાં A અને x એ બંને સ્વતંત્ર અચળાંકો છે.અને તેથી આપણે સમી.(35) અને સમી. (34) ના અજમાયશી ઉપાય રૂપે લઇ શકાય. તેથી સમી.(35) ને ઉકેલ રૂપે લેતાં તેમાં A અચળાંક હોવાથી,

$\frac{dx}{dt} = \alpha A e^{\alpha t}$ અને $\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 A e^{\alpha t}$ આ મૂલ્યો સમી.(34) માં મૂકી સાદુરૂપ લેતાં,

$$\alpha^2 + 2bx + K^2 = 0 \qquad \text{અથવા} \qquad \alpha = -b \pm \sqrt{b^2 - K^2}$$

અહીં α ની બે કિંમત મળતી હોવાથી સમી.(34) નો સાર્વત્રિક ઉકેલ નીચેમુજબ થશે.

$$x = Ae^{\left(-b+\sqrt{b^2-K^2}\right)t} + B\,e^{\left(-b-\sqrt{b^2-K^2}\right)t}$$ _____ eq$^{n.}$ (36)

સમી.(36) માં A અને B સ્વતંત્ર અચળાંકો છે. અને તેના મૂલ્યો શિમા સરતો લાગુ પાડી મેળવી શકાય છે. સમી.(33) પરથી

$$Q = x + \frac{E}{K^2L} = \frac{E}{K^2L} + Ae^{\left(-b+\sqrt{b^2-K^2}\right)t} + B\,e^{\left(-b-\sqrt{b^2-K^2}\right)t}$$

હવે, સરળતા ખાતર $\sqrt{b^2 - K^2} = g$ મૂકીએ અને $K^2 = \frac{1}{LC}$ તો,

$$\frac{E}{K^2L} = \frac{ELC}{L} = EC = Q_0$$

જ્યાં Q_0 એ સંગ્રાહક પરના અંતિમ સ્થિત વીજભાર નું મૂલ્ય છે. કે જે સમયે તેમના બે છેડા વચ્ચે નો વીજસ્થિતિમાન નો તફાવત બેટરી ના વિજાચાલક બળ E જેટલો હોય.

તેથી, $$Q = Q_0 + e^{-bt}\left(A\,e^{gt} + B\,e^{-gt}\right)$$ _______ eq$^{n.}$ (37)

હવે જો $t = 0$ તો $Q = 0$ અથવા $A + B = -Q_0$ ________ eq$^{n.}$ (38)

સમી.(37) નું વિકલન લેતાં,

$$\frac{dQ}{dt} = -b\, e^{-bt}\left(A\, e^{gt} + B\, e^{-gt} \right) + g e^{-bt}\left(A\, e^{gt} - B\, e^{-gt} \right)$$

ફરીથી જોઈએ તો, $t = 0$ માટે $Q = \frac{dQ}{dt} = 0$

માટે, $0 = -b\,(A + B) + g\,(A - B)$ અથવા $A - B = \frac{b}{g}\,(A + B)$

અથવા $A - B = -\frac{b}{g}\, Q_0$ [સમી. (38) પરથી] _________ eq$^{n.}$ (39)

સમી.(38) અને સમી. (39) નો સરવાળો લેતાં,

$$A + B + A - B = -Q_0 - \frac{b}{g}\, Q_0 \qquad \therefore \quad A = -\frac{Q}{2}\left(1 + \frac{b}{g}\right)$$

સમી.(38) અને સમી. (39) ની બાદબાકી લેતાં,

$$A + B - A + B = -Q_0 + \frac{b}{g}\, Q_0$$

$$\therefore \quad B = -\frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{b}{g}\right)$$

A અને B ની આ કિંમતો સમી.(37) માં મૂકતાં

$Q = Q_0 - \frac{Q_0}{2}\, e^{-bt}\left\{\left(1 + \frac{b}{g}\right) e^{gt} + \left(1 - \frac{b}{g}\right) e^{-gt}\right\}$ ____ eq$^{n.}$ (40)

અહીં g નું મૂલ્ય b અને K ના મૂલ્ય પર આધારિત છે.

- **કિસ્સો-૧ (Case – 1):** જ્યારે $b^2 > K^2$ એટલેકે $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ ત્યારે $g = \sqrt{b^2 - K^2}$ નું સાચું મૂલ્ય મળશે અને તેથી આ મૂલ્ય માટે સમી.(40) પરથી કહી શકાય કે સંગ્રાહક પરનો વીજભાર ચરઘાતાંકીય રીતે વધશે અને તેનો વધારો ત્યાં સુધી ચાલુ રહેશે કે જ્યારે તેનું અંતિમ મૂલ્ય Q_0 પ્રાપ્ત કરે. જે નીચેની આકૃતિ-14 માં વક્ર (a) વડે દર્શાવેલ છે.

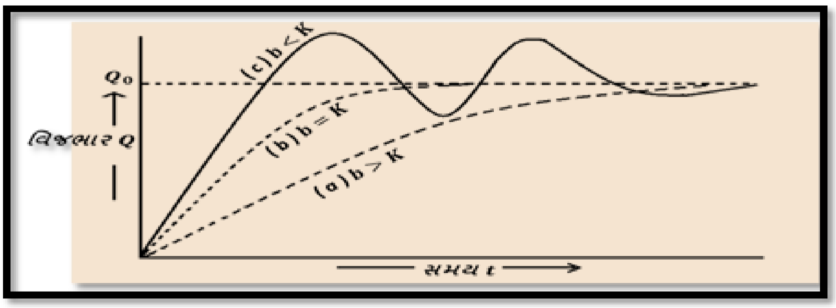


Fig:14

➢ કિસ્સો-૨ (Case – 2)

હવે જો $b^2 = K^2$ હોય તો પરિપથ ની વર્તુણક અમાન્ય થઈ જાય છે. કારણ કે આવા કિસ્સામાં વીજભાર ક્ષય તરફ જતો નથી કે આંદોલિત પણ થતો નથી જે ઉપરની આકૃતિ-13 માં વક્ર(b) દ્વારા દર્શાવેલ છે.

➢ કિસ્સો-3 (Case – 3)

જ્યારે $b^2 < K^2$ એટલેકે $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ ત્યારે $g = \sqrt{b^2 - K^2}$ નું મૂલ્ય આભાસી થશે.

$\therefore \; g = \sqrt{-(K^2 - b^2)} = j\omega$ જ્યાં $\omega = \sqrt{K^2 - b^2}$

હવે, સમી.(40) માં જો $g = j\omega$ મૂકીએ તો,

$$Q = Q_0 - \frac{Q_0}{2} e^{-bt} \left[\left(1 + \frac{b}{j\omega}\right) e^{j\omega t} + \left(1 - \frac{b}{j\omega}\right) e^{-j\omega t}\right]$$

$$\therefore \; Q = Q_0 - \frac{Q_0}{2} e^{-bt} \left[\left(1 + \frac{b}{j\omega}\right) (\cos\omega t + j\,\sin\omega t) + \left(1 - \frac{b}{j\omega}\right) (\cos\omega t - j\,\sin\omega t)\right]$$

$$\therefore \; Q = Q_0 - \frac{Q_0}{2} e^{-bt} \left[2\,\cos\omega t + \frac{2b}{\omega}\sin\omega t\right]$$

$$\therefore \; Q = Q_0 \left[1 - e^{-bt} \left(\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$$

$$\therefore \; Q = Q_0 \left[1 - \frac{e^{-bt}}{\omega} \left(\omega\cos\omega t + b\sin\omega t\right)\right]$$

હવે, ω નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$\therefore \; Q = Q_0 \left[1 - \frac{e^{-bt}}{\sqrt{K^2 - b^2}} \left(\sqrt{K^2 - b^2}\cos\omega t + b\sin\omega t\right)\right] \quad \text{\_\_\_\_ eq}^{n.}\,(41)$$

હવે જો, $\tan\alpha = \frac{\sqrt{K^2 - b^2}}{b} = \frac{2L}{R}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

અને જો $\sin\alpha = \frac{\sqrt{K^2 - b^2}}{K}$ તો, $\quad \tan\alpha = \sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}$ અને $\quad \cos\alpha = \frac{b}{K}$

ઉપર મૂજબની કિંમતો સમી.(41) માં મૂકતાં,

$$Q = Q_0 \left[1 - \frac{Ke^{-bt}}{\sqrt{K^2 - b^2}} \left(\sin\alpha\,\cos\omega t + \cos\alpha\sin\omega t\right)\right]$$

તેથી, $$Q = Q_0 \left[1 - \frac{K\,e^{-bt}}{\sqrt{K^2 - b^2}}\sin(\omega t + \alpha)\right] \quad \text{\_\_\_\_ eq}^{n.}\,(42)$$

સમી.(42) દર્શાવે છે કે સંગ્રાહક પરનો વીજભાર તેના અંતિમ મૂલ્ય Q_0 ની આસપાસ સાદી પ્રસંવાદિ ગતી ના રૂપે દોલન કરેછે. અને આ દોલીત વીજભાર નો કંપવિસ્તાર નું મૂલ્ય $\frac{Q_0 K\, e^{-bt}}{\sqrt{K^2 - b^2}}$ થશે.

અને અહીં કંપવિસ્તારમાં આવેલ ઘટક e^{-bt} ને કારણે તેનો કંપવિસ્તાર ચરઘાતાંકિય રીતે ઘટીને નાશ પામશે. અને આપણે $b = \frac{R}{2L}$ લીઘેલ હોવાથી; પરિપથ માંનો અવરોધ જો લઘુઆવરોધ હોય તો b નું મૂલ્ય નાનુ થશે અને તેથી કંપવિસ્તાર ખૂબ જ ધીમે નાશ પામશે અને જો $R = 0$ હોય તો કંપવિસ્તારQ_0 થશે કારણકે $R = 0$ માટે $b = 0$ થશે અને આવા કિસ્સામાં અવમંદિત આંદોલનો એ સાદી પ્રસંવાદી ગતિના રૂપનાં થઈ જશે. અવમંદિત ઘટક કે જે અવરોધ ના રૂપમાં છે તે આવા કિસ્સામાં પરિપથમાં થી દૂર થઈ જાય છે આમ આ પ્રકારના દોલનો ની અસર આગળની આકૃતિમાં વક્ર દ્વારા દર્શાવેલ છે.

(II) જાળતંત્ર ના પ્રમેયો (Network Theorems)

- Superposition Theorem (18.5),
- Thevenin's Theorem (18.6),
- Norton's Theorem (18.7),
- Maximum Power Theorem (18.8),
- Related Examples & Problem

❖ પરીપથોનું વિશ્લેષણ: (Circuit Analysis):

જયારે પરીપથમાં ઘણા બધા ઘટકો જોડાયેલા હોય છે. ત્યારે તેનું વિશ્લેષણ કરવું ઘણું જ મુશ્કેલ ભર્યું છે. ત્યારે પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરીને પરીપથને સરળ બનાવી શકાય છે.

પરીપથોનું વિશ્લેષણ જાણવા માટે વિધુત પરિપથમાં વપરાતા કેટલાક શબ્દોનો અર્થ જાણવો જરૂરી છે.

(1) પરિપથ: (Circuit):

વિજચાલક બળના ઉદભવસ્થાન, અવરોધ, પ્રેરક, સંગ્રાહક, વગેરે ઘટકો જો બંધ ગાળા સ્વરૂપે જોડાયેલા હોયતો તેને સર્કીટ(પરિપથ) કહેવામા આવે છે. જો આવી સર્કીટમાં ઈલેક્ટ્રોનીક રચનાઓ જેવીકે ડાયોડ, ટ્રાનઝીસ્ટર , FET, UJT વગેરે આવેલા હોય તો તેને ઈલેક્ટ્રોનીક સર્કીટ(પરિપથ) કહેવામા આવે છે.

(2) સક્રિય ઘટકો: (Active element):

વિજપરીપથને પાવર પુરો પાડનાર ઘાતક એટલે કે વિજચાલકબળના ઉદભવસ્થાનને પરીપથનો સક્રિય ઘટક કહેવામા આવે છે.

(3) નિષ્ક્રિય ઘટક: (Passive element):

વિજપાવર ને સ્વીકારીને તેને ઉષ્મા શક્તિમાં રૂપાંતરકરે અથવા તો ચુંબકીયક્ષેત્ર કે વીજક્ષેત્ર સ્વરૂપે સંગ્રહ કરે તેવા પરીપથના ઘટકોને નિષ્ક્રિય ઘટક કહેવામા આવે છે. દા.ત. અવરોધ, પ્રેરક, કેપેસીટર વગેરે.

(4) નેટવર્ક: (Network):

ઘણા વિજપરીપથ માં એક કરતાં વધારે સક્રિય ઉદભવસ્થાનો , પ્રેરક, સંગ્રાહક, અવરોધ, મોટર, વગેરે ઘટકો ગુઢ રીતે જોડાયેલા હોયા છે. આવા સક્રિય અને નિષ્ક્રિય ઘટકો વડે બનતા ગુઢ પરીપથો ને તેના વિશ્લેષણ કરવાના સંદર્ભમાં નેટવર્ક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. Fig-1 માં બે e.m.f. તથા છ અવબાધોથી બનતું એક નેટવર્ક દર્શાવેલ છે.

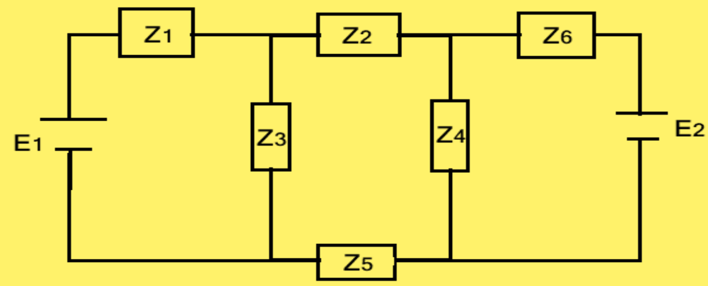


Fig:1 Network consist with 2 emf & 6 Impedance

(5) મેશ અથવા લુપ:(Mesh or Loop):

નેટવર્ક ની જે શાખા બંધ ગાળો રચે તેને મેશ અથવા લુપ કહે છે.

(6) સુરેખ નેટવર્ક: (Linear network):

જે સર્કીટમાં emf ઉપરાંત માત્ર સુરેખ (રેખીય) ઘટકોનો જ ઉપયોગ થયેલો હોય તેવા નેટવર્ક ને સુરેખ નેટવર્ક કહે છે.

(7) આદર્શ વોલ્ટેજ જનરેટર(Ideal voltage source) :

આ એક એવું ઉર્જા ઉદગમ છે કે જેનો શ્રેણી અવરોધ શૂન્ય છે તથા અચળ વોલ્ટેજ આપે છે.

(8) આદર્શ કરંટ જનરેટર(Ideal current source) :

આ એક એવું ઉર્જા ઉદગમ છે કે જેનો સમાંતર અવરોધ અનંત છે તથા અચળ પ્રવાહ આપે છે.

(9) નોડ બિંદુ (Node) :

આ એક એવું બિંદુ છે કે જ્યાં આગળ વિધુત પરિપથ સાથે જોડાયેલી એક કરતાં વધારે બ્રાન્ચ ભેગી થાય છે.

(10) બ્રાન્ચ(Branch) : આ પરીપથનો એવો વિભાગ છે કે જેમાંથી વિધુત પ્રવાહ અચળ વહે છે. તે બે પ્રકારની છે.

(i) Active branch:

આ વિભાગમાં સક્રિય ઉર્જા ઉદગમો તથા એક્ટીવ કોમ્પોનન્ટ જોડાયેલા હોય છે.

(ii) Passive branch:

આ વિભાગમાં સક્રિય ઉર્જા ઉદગમો તથા એક્ટીવ કોમ્પોનન્ટ જોડાયેલા હોતા નથી.

❖ નેટવર્કનું વિશ્લેષણ: (Analysis of Network):

નેટવર્ક ના વિશ્લેષણ માટે મૂળભૂત રીતે કિર્ચોફના બે નિયમોનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. આ નિયમો નીચે મુજબ છે.

(1) વિજપ્રવાહ નો નિયમ: (Current Law):

નેટવર્ક ના કોઈપણ જોડાણ બિંદુ આગળ વિજપ્રવાહનો બૈજિક સરવાળો શૂન્ય થાય છે. આ નિયમ વડે થતાં નેટવર્કના વિશ્લેષણને જંકશન વિશ્લેષણ કે Node વિશ્લેષણ કહે છે.

(2) વિજદબાણ નો નિયમ : (Voltage Law):

નેટવર્ક ના કોઈપણ બંધ ગાળા (Loop) માં આવેલા અવરોધો કે અવબાધો માથી પસાર થતાં પ્રવાહોને ધ્યાનમાં લેતા, જે તે અવરોધ (કે અવબાધ) અને તેમાથી પસાર થતો પ્રવાહનો ગુણાકાર દરેક ઘટકો માટે લઈને તેનો બૈજિક સરવાળો લેતા, આ સરવાળાનું મૂલ્ય તે બંધ ગાળા માં રહેલા વિધુતાચાલક બળો ના બૈજિક સરવાળા જેટલું હોય છે. આ નિયમ વડે થતાં નેટવર્કના વિશ્લેષણને Loop વિશ્લેષણ કહેવામા આવે છે.

➢ અધ્યારોપણ નું પ્રમેય (Superposition Theorem, 18.5)

" કોઇપણ એક રેખીય જાળતંત્ર માં જો એક કરતાં વધારે વિદ્યુત ઉદ્દભવ સ્થાન અને એક કરતાં વધારે અવબાધો આવેલા હોય અને તેના કોઈપણ ઘટક માથી વહેતો વિદ્યુત પ્રવાહ કે વૉલ્ટેજ તેના દરેક વિદ્યુત ઉદ્દભવ ના કારણે વહેતા પ્રવાહ કે વૉલ્ટેજના સદિશ સરવાળા બરાબર હોય છે. "(કથન) એટલે કે દરેક શાખામા વહેતો પ્રવાહ જો કોઈ એક વિદ્યુત ઉદ્દભવ માટે માપવામાં આવે અને , તે વખતે બીજા અન્ય ઉદ્દભવોને પરીપથ માથી દૂર કરવામા આવે તો, જે પ્રવાહ મળે છે. તેજ રીતે દરેક વિદ્યુત ઉદ્દભવો માટે પ્રવાહ મેળવી અને તેનો સદિશ સરવાળો લેવામાં આવે તો તે પરીપથ ના દરેક ઘટકો માથી વહેતો પ્રવાહ દર્શાવશે.

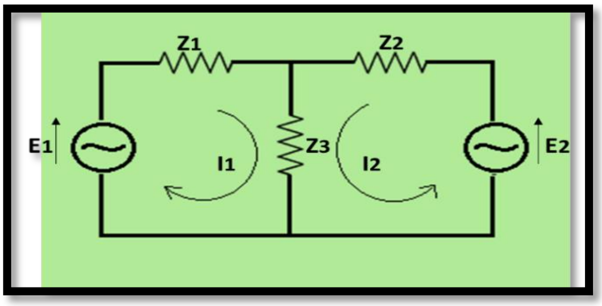


Fig-a

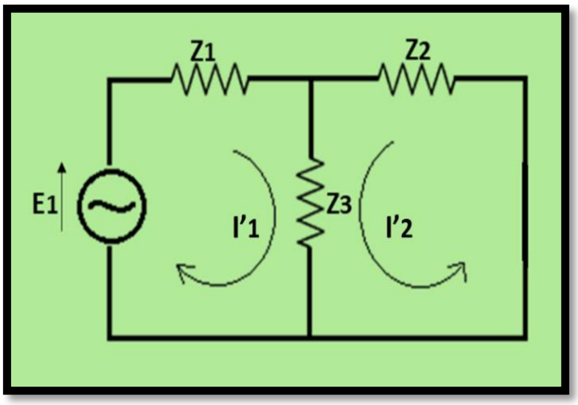


Fig-b

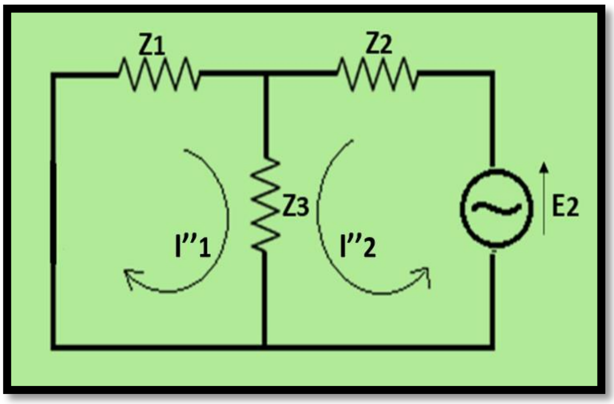


Fig-c

[આકૃતિ (b) અને (c) માં દર્શાવેલ પરીપથો એ આકૃતિ (a) ના સમતુલ્ય પરિપથો છે.]

ઉપરની આકૃતિ (a) મા દર્શાવ્યા મુજબ જો એક જળતંત્ર માં બે વિદ્યુત ઉદ્દભવ સ્થાનો E_1 અને E_2 આવેલા હોય અને જો તેમાં ત્રણ અવાબાધો Z_1 , Z_2 અને Z_3 આવેલા છે. જો E_1 અને E_2 દ્વારા વહેતો પ્રવાહ I_1, અને I_2 હોય તો કીર્ચોફના બીજા નિયમ અનુસાર સમી. નીચે મુજબ મળે.

$$E_1 = I_1(Z_1 + Z_3) + I_2Z_3 \quad (1)$$

અને
$$E_2 = I_1Z_3 + I_2(Z_2 + Z_3) \quad (2)$$

(Fig-b) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વિધુત પરીપથમાં ફક્ત ઉર્જા ઉદગમ E_1 તથા અવબાધ Z_1, Z_2, Z_3 જોડાયેલ છે અને ઉર્જા ઉદગમ E_2 ના સ્થાને તેનો આંતરિક અવબાધ શૂન્ય છે.તે સમયે ફક્ત ઉર્જા ઉદગમ E_1 દ્વારા પરીપથમાં વહેતો પ્રવાહ I_1' તથા I_2' હોય તો કીર્ચોફના બીજા નિયમ અનુસાર

$$E_1 = I_1'(Z_1 + Z_3) + I_2'Z_3 \quad (3)$$

અને
$$0 = I_1'Z_3 + I_2'(Z_2 + Z_3) \quad (4)$$

(Fig-c)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વિધુત પરીપથમાં ફક્ત ઉર્જા ઉદગમ E2 તથા અવબાધ Z1, Z2, Z3 જોડાયેલ છે અને ઉર્જા ઉદગમ E_1 ના સ્થાને તેનો આંતરિક અવબાધ શૂન્ય છે.તે સમયે ફક્ત ઉર્જા ઉદગમ E_2 દ્વારા પરીપથમાં વહેતો પ્રવાહ I_1'' તથા I_2'' હોય તો કીર્ચોફના બીજા નિયમ અનુસાર

$$0 = I_1''(Z_1 + Z_3) + I_2''Z_3 \qquad (5)$$

$$E_2 = I_1''Z_3 + I_2''(Z_2 + Z_3) \qquad (6)$$

સમી.(3) અને (5) તથા સમી.(4) અને (6) નો સરવાળો કરતાં

$$E_1 = (I_1' + I_1'')(Z_1 + Z_3) + (I_2' + I_2'')\, Z_3 \qquad (7)$$

$$E_2 = (I_2' + I_2'')(Z_2 + Z_3) + (I_1' + I_1'')\, Z_3 \qquad (8)$$

અધ્યારોપણ પ્રમેય અનુસાર E_1 દ્વારા પરિપથમાં વહેતો પ્રવાહ I_1' અને I_2' હોય તથા E_1 દ્વારા પરિપથમાં વહેતો પ્રવાહ I_1'' અને I_2'' હોય તો પરીપથામાં વહેતો કુલ પ્રવાહ

$$I_1 = I_1' + I_1''$$

$$I_2 = I_2' + I_2''$$

ઉપરના સમી. નીચે મુજબ મળે.

$$E_1 = I_1(Z_1 + Z_3) + I_2\, Z_3$$

$$E_2 = I_2(Z_2 + Z_3) + I_1\, Z_3$$

જે ઉપરના સમી. (1) અને (2) જેવા છે. જે અધ્યારોપણ પ્રમેય સાબિત કરે છે.

➢ થેવેનીન નું પ્રમેય (Thevenin's Theorem, 18.6)

જ્યારે કોઈ જટિલ પરીપથ નું વિશ્લેષણ કરવા માટે લાંબી ગણિતીય પ્રક્રિયા કરવી પડતી હોય તેનાથી છુટકારો મેળવવા માટે થેવેનીન ના પ્રમેય નો ઉપયોગ કરી અને જટિલ પરીપથ નું ખૂબજ સરળતા થી વિશ્લેષણ કરી શકાય છે. અને તે માટે જટિલ પરીપથ માં ઓછી અગત્યતા ધરાવતા ઘટકો ને અવગણી અને જટિલ પરીપથ જેવીજ લાક્ષણિકતા ધરાવતા સમતુલ્ય પરીપથ દ્વારા જટિલ પરીપથનું વિશ્લેષણ કરી શકાય છે. આમ થેવેનીન પ્રમેય દ્વારા સમતુલ્ય પરીપથ મળવી શકાય છે.

(Statement): કોઇપણ બે અથવા બે થી વધારે અવબાધો અને બે અથવા બેથી વધારે ઉદ્દભવ સ્થાનો ધરાવતા પરીપથ માટે તેના અવબધો ને સમતુલ્ય અવબાધ(Zeq) અને તેની શ્રેણીમાં તેના ઉદ્દભવ સ્થાનો ને સમતુલ્ય વિજચાલક્ બળ (Eeq) E' વડે દર્શાવી અને જટિલ પરીપથ ને સમતુલ્ય પરીપથ મેળવી શકાય.

અહીં **E'** મેળવવા માટે પરીપથ ના પ્રદાન **(output)** માં આવેલ ભાર અવરોધ ને દૂર કરી એટલેકે પ્રદાન પ્રવાહ નું મૂલ્ય શૂન્ય કરી અને તેના પ્રદાન ના બે છેડા વચ્ચે માપવામાં આવેલ વિદ્યુત ચાલક બળ નું મૂલ્ય અને તેજ રીતે અવબાધ **Z'** એટલેકે આઉટપુટ ના બે છેડા વચ્ચેનો અવબાધ કે જ્યારે પરીપથ માં આવેલા બધાજ વિદ્યુત ઉદભવો ને દૂર કરી તેને સ્થાને તેના આંતરિક અવબાધ જેટલો અવબાધ લઈને માપવામાં આવેલ મૂલ્ય.

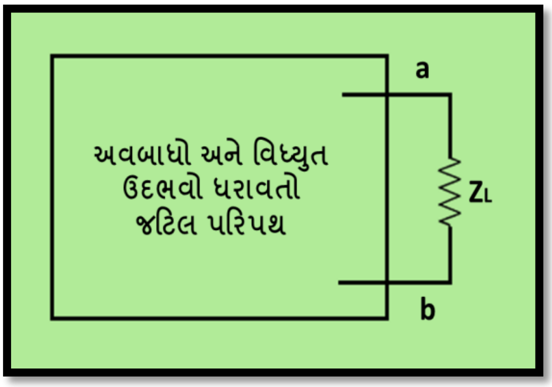


Fig. -1 (a)

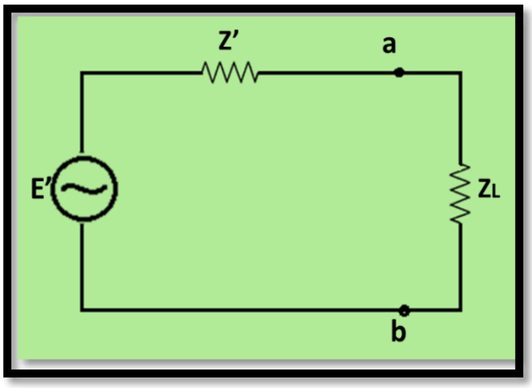


Fig. -1(b)

થેવેનીન્સ નું પ્રમેય સમજવા ઉપરની આકૃતિ-1(a) મા ભાર અવબાધ **ZL** ના બે છેડા સાથે એક જટિલ જાળતંત્ર જોડાયેલ છે કે જે ઘણાબધા અવબાધો અને ઘણા વિદ્યુત ઉદ્દભવ સ્થાનો ધરાવે છે. અને આકૃતિ-1(b) માં આ જટિલ જાળતંત્ર ને સમતુલ્ય થેવેનીન્સ જાળતંત્ર છે કે જે પ્રદાન ના બે છેડા વચ્ચે મળતા અવબાધ જેટલો એક અવબાધ **Z'** અને તેની શ્રેણીમા જટિલ જાળતંત્ર ના વિદ્યુત ઉદભવો ને સમતુલ્ય એક વોલ્ટેજ ઉદભવ સ્થાન **E'** ધરાવે છે. આ રીતે જટિલ જાળતંત્ર ગમે તે પ્રકાર નું જટિલ બંધારણ ધરાવતું હોય તો પણ તેને થેવેનીન પ્રમેય દ્વારા સરળ જાળતંત્ર માં ફેરવી શકાય છે.

આ પ્રમેય ના ઉદાહરણ રૂપે નીચેની આકૃતિમા દર્શાવ્યા મુજબ નું જાળતંત્ર લઈએ તો,

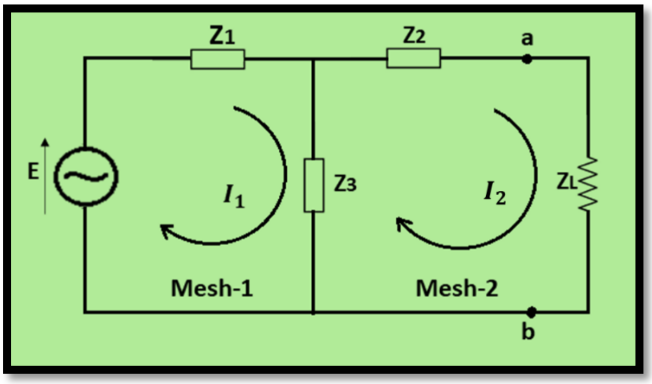


Fig. -2 (a)

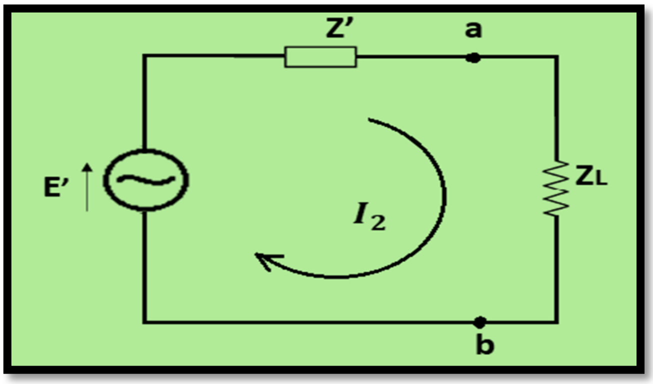


Fig. -2 (b)

આકૃતિ-2(a) મા બે ટર્મિનલ વાળું જાળતંત્ર દર્શાવેલ છે. જેની મેશ-૧ એક્ટિવ મેશ છે, અને મેશ-૨ પેસીવ મેશ છે. તેના બે છેડા a અને b સાથે પ્રદાન ભાર અવબાધ જોડાયેલ છે. આકૃતિ-2(b) મા આ જાળતંત્ર (a) ને સમતુલ્ય થેવેનીન સમતુલ્ય પરીપથ દર્શાવેલ છે.

I_1 અને I_2 એ મેશ-૧ અને મેશ-૨ માં વહેતો પ્રવાહ છે. હવે આ બંને મેશ માટે કિરચોફનો નિયમ લગાવતા

$$Z_1I_1 + Z_3I_1 - Z_3I_2 = E \quad \_\_\_\_ eq^{n.}(1)$$

અને $$(Z_2 + Z_3 + Z_L)\, I_2 - Z_3I_1 = 0 \quad \_\_\_\_\_ eq^{n.}(2)$$

હવે સમી.(૨)પરથી

$$I_1 = \frac{(Z_2 + Z_3 + Z_L)\, I_2}{Z_3}$$

I_1ની આ કિંમત સમી. (1) મા મૂકતાં

$$(Z_1 + Z_3)\, \frac{(Z_2 + Z_3 + Z_L)}{Z_3}\, I_2 - Z_3I_2 = E$$

અથવા $$(Z_1 + Z_3)\,(Z_2 + Z_3 + Z_L)\, I_2 - Z_3^2I_2 = EZ_3$$

અથવા

$$I_2 = \frac{EZ_3}{(Z_1 + Z_3)\,(Z_2 + Z_3 + Z_L) - Z_3^2}$$

$$I_2 = \frac{\frac{EZ_3}{Z_1 + Z_3}}{Z_2 + Z_3 + Z_L - \frac{Z_3^2}{Z_1 + Z_3}}$$

અથવા $$I_2 = \frac{\frac{EZ_3}{Z_1 + Z_3}}{Z_2 + Z_L + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}} \text{ \_\_\_\_\_\_ } eq^{n.}(3)$$

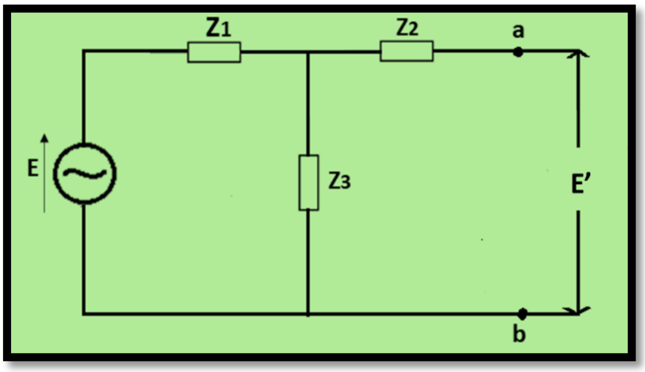


Fig. -3 (a)

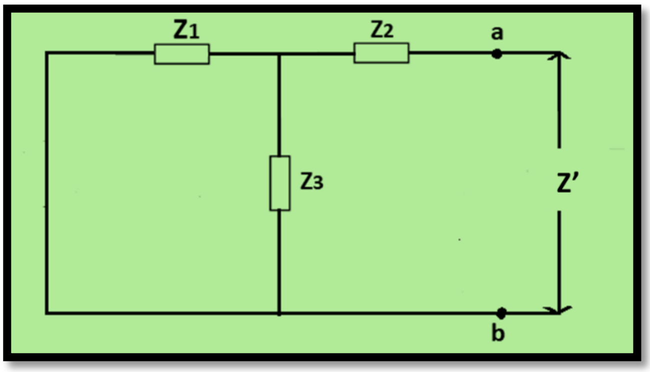


Fig. -3(b)

આકૃતિ-3(a) માં દર્શાવ્યા મુજબ a અને b વચ્ચેથી પ્રદાન અવબાધ Z_L ને દૂર કરી ને ઓપન સર્કિટ વોલ્ટેજ E' મેળવવા માં આવે છે. અને તેથી Z_2 ના બે છેડા વચ્ચે વીજસ્થિતિમાન માં કોઈ ઘટાડો થશે નહિ. અને તેથી ઓહ્મ ના નિયમ મુજબ પ્રવાહ નું મૂલ્ય નીચે મુજબ થશે.

$$I = \frac{E}{Z_1 + Z_3}$$

અને ઓપન સર્કિટ વોલ્ટેજ $$E' = IZ_3 = \frac{EZ_3}{Z_1 + Z_3} \text{ \_\_\_\_\_\_ } eq^{n.}(4)$$

હવે, આકૃતિ-3(b) માં દર્શાવ્યા મુજબ a અને b ના આગળ ના ભાગ માથી વિદ્યુત ઉદભવ સ્થાનો દૂર કરી અને પરીપથનો શોર્ટ સર્કિટ અવબાધ શોધી શકાય છે.

અહીં Z_1 અને Z_3 એ એકબીજાને સમાંતર રહેલ છે અને Z_2 એ બંને ની શ્રેણીમા છે. તેથી,

$$Z' = Z_2 + Z$$

જ્યાં, $$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_3}$$

અથવા $$Z = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}$$

તેથી, $$Z' = Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} \text{ \_\_\_\_\_\_ } eq^{n.}(5)$$

તેથી સમી.(4) અને (5) પરથી સમી.(3) નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$I_2 = \frac{E'}{Z' + Z_L} \quad \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(6)$$

અને આકૃતિ (b) મુજબ

$$I_2 = \frac{E'}{Z' + Z_L} \quad \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(7)$$

તેથી સમી. (6) અને (7) બંને સમાન મળે છે. જે થેવેનીન પ્રમેય સિધ્ધ થાય છે, તે દર્શાવે છે. અને આ રીતે કોઈપણ જટિલ પરીપથ માટે ઓપન સર્કિટ વોલ્ટેજ E' અને શોર્ટ સર્કિટ અવબાધ Z' મેળવી અને થેવેનીન સમતુલ્ય પરીપથ મેળવી શકાય છે.

➢ નોર્ટન નું પ્રમેય (Norton's Theorem, 18.7)

નોર્ટન ના પ્રમેય દ્વારા એવા પરિપથ ને સમતુલ્ય પરિપથ મેળવવામાં આવે છે કે જે પરિપથમાં વોલ્ટેજ ઉદ્ભવસ્થાન ના બદલે પ્રવાહ ઉદભવ સ્થાન અગત્યનું હોય અને તેથી આવા સમતુલ્ય પરિપથમાં એક વોલ્ટેજ ઉદ્ભવસ્થાન ને બદલે પ્રવાહ ઉદ્ભવસ્થાન લેવામાં આવે છે.

કથન:

એક જાળતંત્ર કે જેમાં એક કરતાં વધારે ઉદભવ સ્થાન અને એક કરતાં વધારે અવબાધો આવેલ હોય અને તેના બે આઉટપુટ છેડા સાથે એક લોડ અવબાધ Z_L જોડાયેલ હોય તો તેને સમતુલ્ય પરિપથ એક પ્રવાહ ઉદ્ભવસ્થાન I' ને સમાંતર અવબાધ Z' દ્વારા મેળવી શકાય.

જેમાં પ્રવાહ ઉદભવ સ્થાન I' નું મૂલ્ય મેળવવા આઉટપુટ ભાર અવબાધ સાથે જોડેલ બે ટર્મિનલ ને શોર્ટ સર્કિટ કરી મેળવી શકાય છે, અને શંટ અવબાધ Z' નું મૂલ્ય મેળવવા તેના આંતરિક ઉદ્ભવસ્થાનો દૂર કરી અને તેની જગ્યાએ તેનો આંતરિક અવબાધ લઇ મેળવી શકાય.

નોર્ટન ના પ્રમેય ની સમજૂતી માટે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણેના બે પરિપથ ને ધ્યાનમાં લેતાં આકૃતિ-4(b) માં આકૃતિ-4(a) માટેનો નોર્ટન સમતુલ્ય પરિપથ થશે.

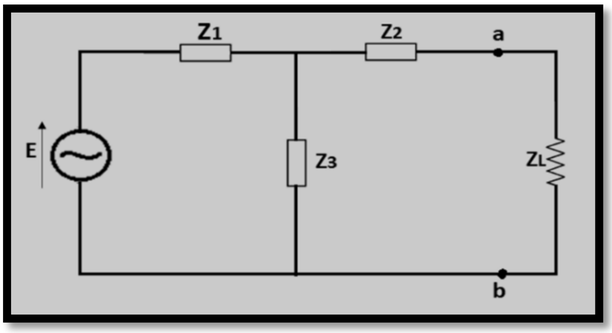


Fig. -4 (a)

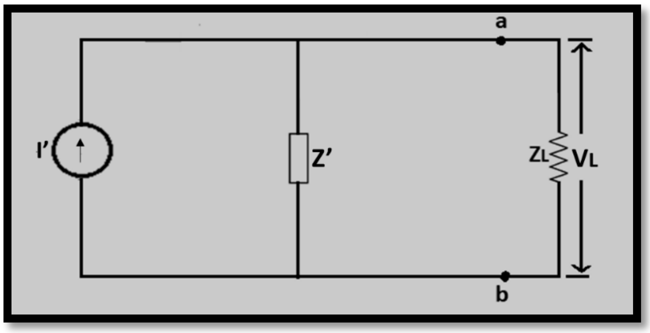


Fig. -4 (b)

લોડ અવબાધ Z_L માં વહેતો પ્રવાહ નીચે મુજબ મળશે.

$$I_L = \frac{V_L}{Z_L}$$

હવે આકૃતિ-4 **(b)** પરથી ઓહ્મ ના નિયમ મુજબ Z_L ના બે છેડા વચ્ચેનો વોલ્ટેજ $V_L = I'Z$ થશે.

જ્યાં $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z'} + \frac{1}{Z_L}$ અથવા $Z = \frac{Z' Z_L}{Z' + Z_L}$

તેથી $$I_L = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{I'Z'}{Z' + Z_L} = \frac{I'}{1 + \frac{Z_L}{Z'}} \quad \text{\_\_\_\_\_\_} eq^{n.}(8)$$

હવે અગાઉ દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રવાહનું મૂલ્ય મેળવવા નીચેની આકૃતિ-4**(c)** માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આઉટપુટ ટર્મિનલને શોર્ટ સર્કિટ કરતા અને તેની બંને મેશ માટે કીરચોફ નો નિયમ લગાડતા.

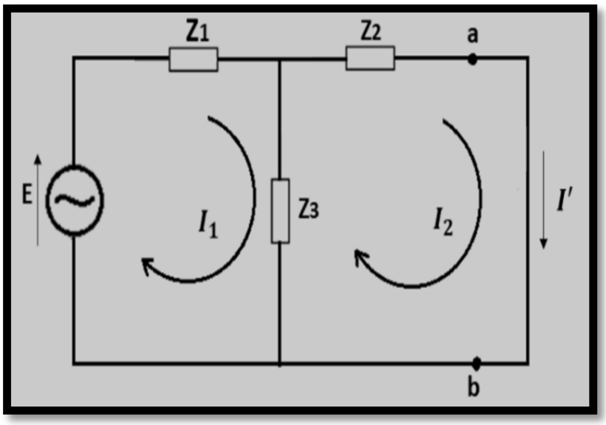


Fig. -4 (c)

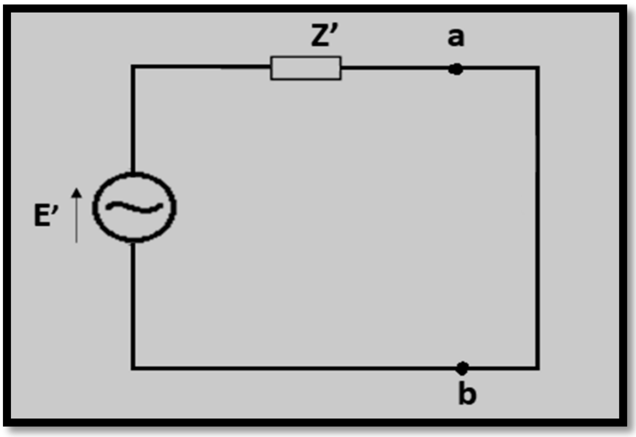


Fig. -4 (d)

$$I_1 (Z_1 + Z_3) - I'Z_3 = E$$

અને $$(Z_2 + Z_3)\, I' - I_1 Z_3 = 0$$

તેથી $$(Z_1 + Z_3)\, \frac{(Z_2 + Z_3)\, I'}{Z_3} - I'Z_3 = E$$

અથવા $(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3)\, I' - Z_3^2 I' = EZ_3$

અથવા $I' = \dfrac{EZ_3}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_3) - Z_3^2}$

અથવા $I' = \dfrac{EZ_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$ ______$eq^{n.}(9)$

અને સમાંતર અવબાધ Z' મેળવવા આઉટપુટ ટર્મિનલ થી આગળના ભાગના બધા જ ઉદ્ભવ સ્થાનો ને દૂર કરી અને તેને સ્થાને તેના આંતરિક અવબાધ લઈને મેળવી શકાય છે અને તેથી આકૃતિ-4(b) મુજબ.

$$Z' = Z_2 + \frac{Z_1Z_3}{Z_1 + Z_3} \quad \text{______} eq^{n.}(10)$$

અને આ રીતે I' અને Z' ના મૂલ્ય મેળવી લોડ અવબાધ Z_L માંથી વહેતો પ્રવાહ I_L સમીકરણ (8) મુજબ મેળવી શકાય છે.

❖ થેવેનીન અને નોર્ટન સમતુલ્ય પરીપથ વચ્ચે નો સંબંધ.

ઉપરની ચર્ચા પરથી આપણે એવા તારણ પર આવીએ છીએ કે કોઈ પણ જટિલ જાળતંત્ર ને તેને સમતુલ્ય થેવેનીન કે નોર્ટન પરિપથ માં ફેરવી શકાય છે આકૃતિ-3(b) માં દર્શાવેલ થેવેનીન સમતુલ્ય પરીપથ નો પ્રવાહ I_2 સમી.(6) દ્વારા મળે છે.

$$I_2 = \frac{E'}{Z' + Z_L} \quad \text{______} eq^{n.}(11)$$

અને નોર્ટન સમતુલ્ય પરિપથ મુજબ સમી.(8) પ્રમાણે

$$I_L = \frac{I'Z'}{Z' + Z_L} \quad \text{______} eq^{n.}(12)$$

આકૃતિ-3(b) માં દર્શાવેલ થેવેનીન સમતુલ્ય પરીપથ નો પ્રવાહ I' એ આકૃતિ-5(d) માં દર્શાવેલ પ્રવાહ છે.

$$\therefore \quad I' = \frac{E'}{Z'} \quad \text{______} eq^{n.}(13)$$

અને પ્રવાહ I' ના આ મૂલ્ય પરથી કહી શકાય કે સમી.(11) અને સમી.(12) સરખા છે. તેથી સમી(13) સ્પષ્ટ રીતે દર્શાવે છે કે આકૃતિ-5(b) અને આકૃતિ-3(b) ના પરિપથો સરખા છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે આકૃતિ-4(b) નો પરીપથ એ આકૃતિ-3(b) ના પરીપથ ને સમતુલ્ય છે અને તે બંને મૂળભૂત પરીપથ કે જે આકૃતિ-3(a) અને આકૃતિ-4(a) માં છે તેને સમતુલ્ય છે.

❖ નોર્ટન અને થેવેનીન ના પ્રમાયો ની મર્યાદા.

અહીં બંને પ્રમેયો ના કથન મુજબ જે સમતુલ્ય પરિપથ મળે છે એ ફક્ત લોડ પ્રવાહ માટે નું મૂલ્ય દર્શાવે છે નહિ કે તેને જોડવામાં આવેલ ઉદ્ભવ સ્થાનની સ્થિતિ પર આધારિત હોય. તેથી તે બંને પ્રમેય પર નિયંત્રણ લદાયેલ છે. તે બાબત સ્પષ્ટપણે સમજવા આકૃતિ-3(a) માં દર્શાવેલ પરિપથ ના ઉદભવ સ્થાનોનો પાવર લોસ ધ્યાનમાં લઈએ તો આકૃતિ-3(b) ના ઉદભવ સ્થાનોના પાવર લોસ જેટલો નહીં હોય. સરળતા ખાતર જો આપણે એવું વિચારીએ કે બધા જ અવબાધો એ પ્યોર અવરોધે છે તો તેથી આકૃતિ-3(a) મુજબ ના પરિપથ માંથી જ્યારે લોડ અવરોધ દૂર થશે એટલે કે $Z_L \rightarrow 0$ ત્યારે ઉદ્ભવસ્થાનો દ્વારા થતો પાવર લોસ $P = \frac{E^2}{R_1 + R_3}$ થશે. જ્યારે તેના સમતુલ્ય પરિપથ આકૃતિ-3(b) નો પાવર લોસ લોડઅવરોધ દૂર થતા શૂન્ય થશે.

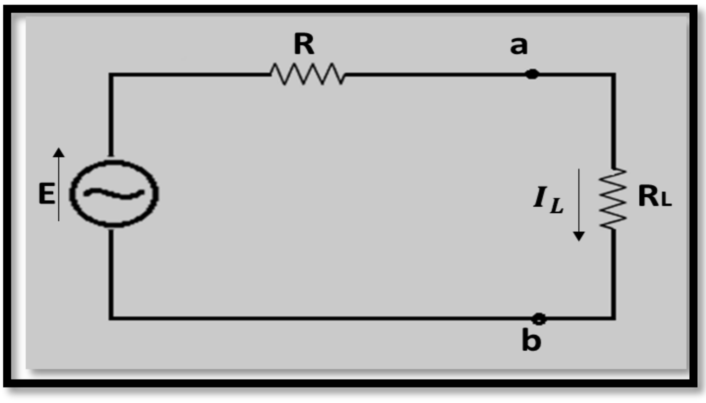
અને તેથી થેવેનીન અને નોર્ટન સમતુલ્ય પરિપથ નો ઉપયોગ પરિપથ ની કાર્યક્ષમતા મેળવવા થતો નથી.

➢ મહત્તમ ઊર્જા સંક્રમણ નું પ્રમેય (Maximum Power Theorem, 18.8)

ઘણી ઇલેક્ટ્રોનિક સર્કિટમા એ જરૂરી હોય છે કે તેની સરકિટ માથી મહત્તમ પાવર તેના ભાર અવરોધ મા ટ્રાન્સફર થાય. અને તે માટેની શરત મહત્તમ ઊર્જા સંક્રમણ પ્રમેય દ્વારા મળે છે.

મહત્તમ ઊર્જા સંક્રમણ ના પ્રમેય મુજબ ભાર અવરોધ ને મહત્તમ ઊર્જા ત્યારે ટ્રાન્સફર થાય છે, જ્યારે તે ઊર્જા આપતી સર્કિટ ના આંતરિક અવરોધ નું મૂલ્ય ભાર અવરોધ ના મૂલ્ય જેટલું હોય.

હવે જો એ માટે આપણે આકૃતિ મા દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક બે ટર્મિનલ વાળું થેવેનીન જાળતંત્ર લઈએ કે જેનો ભાર અવરોધ R_L છે.



તો જુલ ના નિયમ મુજબ ભાર અવરોધ ને મળતો પાવર નીચે મુજબ થશે.

$$P = I^2 R_L$$

$$P = \left[\frac{E}{R + R_L}\right]^2 R_L \quad \_\_\_\_ eq^{n.}(1)$$

$$P = \frac{\frac{E^2}{R_L}}{\left(1 + \frac{R}{R_L}\right)^2} \quad \_\_\_\_ eq^{n.}(2)$$

તે પરથી કહી શકાય કે ભાર અવરોધ મા જે પાવર ઉત્પન્ન થાય છે તે ત્યારે મહત્તમ હશે જયારે પરિપથ નો આંતરિક અવરોધ ન્યુનતમ એટલેકે શૂન્ય હશે.

તેથી જ્યારે $R = 0$ તો $P = P_M = \frac{E^2}{R_L}$

તેથી સમી.(૨) નીચે મુજબ થશે.

$$P = \frac{P_M}{\left(1 + \frac{R}{R_L}\right)^2} \quad \_\_\_\_ eq^{n.}(3)$$

સમી.(3) પરથી કહી શકાય કે P નું મૂલ્ય P_M કરતાં ઓછું હોય છે. અને સમી(૧) પરથી કહી શકાય કે જો R_L નું મૂલ્ય નાનુ હોય તો ભાર અવરોધ માં પાવર નું મૂલ્ય શૂન્ય થશે. અને તેજ રીતે જો ભાર અવરોધ નું મૂલ્ય ખૂબ મોટું હોય તો પણ પાવર નું મૂલ્ય શૂન્ય થશે. તેથી ભાર અવરોધ ના કોઈ એક ચોક્કસ મૂલ્ય માટે ભાર અવરોધ R_L માં પાવર નું મૂલ્ય મહત્તમ થવું જોઈએ. અને આ મહત્તમ મૂલ્ય મેળવવા કે જે મૂલ્ય માટે મહત્તમ પાવર નું સંક્રમણ થાય તે માટે સમી.(૨) નું R_L ને સાપેક્ષ વીકલન લેતાં અને તેના પરિણામ ને શૂન્ય સાથે સરખાવતાં,

$$\frac{dP}{dR_L} = E^2 \frac{d}{dR_L}\left[\frac{1}{R_L} \bullet \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{R_L}\right)^2}\right] = 0$$

$$= E^2 \left[\frac{2\left(1 + \frac{R}{R_L}\right)}{\left(1 + \frac{R}{R_L}\right)^4}\left(-\frac{R}{{R_L}^2}\right)\frac{1}{R_L} + \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{R_L}\right)^2}\left(-\frac{1}{{R_L}^2}\right)\right] = 0$$

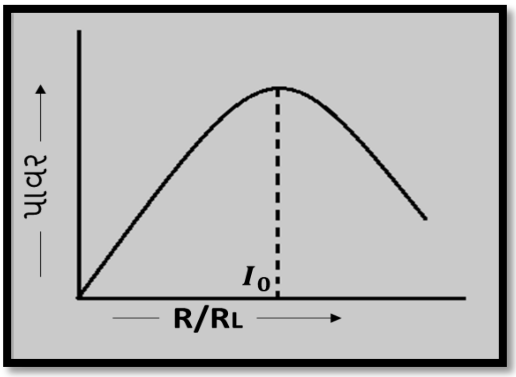
$$= \frac{E^2}{{R_L}^2\left(1 + \frac{R}{R_L}\right)^2}\left[\frac{\frac{2R}{R_L}}{1 + \frac{R}{R_L}} - 1\right] = 0$$

અથવા $$\frac{\frac{2R}{R_L}}{1+\frac{R}{R_L}} - 1 = 0$$

અથવા $$\frac{2R}{R_L} = 1 + \frac{R}{R_L}$$

અથવા $$R_L = R \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_ } eq^{n.}(4)$$

અને તેથી જ્યારે ભાર અવરોધ પરીપથ ના અવરોધ સાથે મેચ થાય છે ત્યારે મહત્તમ પાવર નું સંક્રમણ થાય છે. આમ આ પ્રમેય સિધ્ધ થાય છે. જો ભાર અવરોધ ના પાવર અને $\frac{R}{R_L}$ નો ગ્રાફ દોરવામાં આવે તો તે નીચેની આકૃતિ માં દર્શાવ્યા મુજબ મળશે.



ઉદભવ સ્થાન તરફથી લેવામાં આવતો પાવર નીચે મુજબ થશે.

$$P_S = I^2R + I^2R_L$$

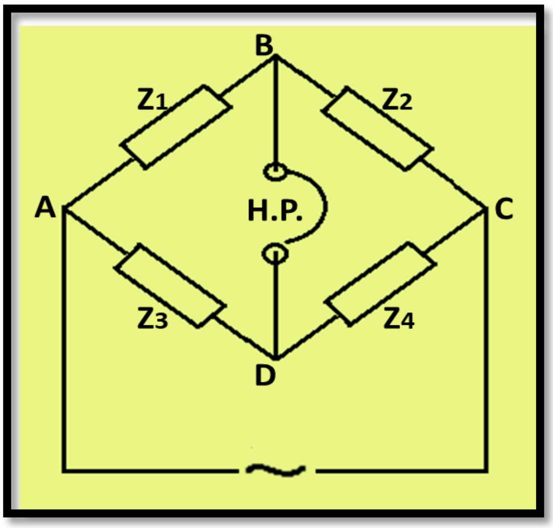
તેથી મહત્તમ પાવર માટે હોવાથી સંક્રમિત પાવર અને ઉદભવ દ્વારા પૂરો પાડવામાં આવતો પાવર નો ગુણોત્તર લેવામાં આવે તો,

$$\frac{P_{Max}}{P_S} = \frac{I^2R_L}{I^2R_L + I^2R_L} = \frac{1}{2} \text{ \_\_\_\_\_\_\_ } eq^{n.}(5)$$

તેથી કહી શકાય કે કોઈપણ પરીપથ ની મહત્તમ ક્ષમતા હોય છે કારણ કે પરીપથ ના આંતરિક અવરોધો દ્વારા અડધા પાવર નો વ્યય થઇ જાય છે.

(iii) એ.સી. બ્રિજો: (A.C. Bridges or પ્રત્યાવર્તી પ્રવાહના સેતુઓ)

(1) પ્રત્યાવર્તી પ્રવાહના સેતુઓ ની પ્રસ્તાવના :(Introduction to A.C. Bridges,17.5)



વ્હિસ્ટન બ્રિજ નો સિધ્ધાંત A.C. પરીપથો માટે પણ લાગુ પાડી શકાય છે. પરંતુ તે માટે અવરોધો ના સ્થાને જે તે શાખા ના અવબાધો ને ધ્યાન મા લેવામાં આવે છે. અને તટસ્થીકરણ બિંદુ મેળવવા માટે હેડફોન અથવા તો ચલિત ગૂંચળા વાળા ગેલ્વેનોમીટર નો ઉપયોગ આવે છે. હેડફોન દ્વારા તટસ્થીકરણ સ્થિતિમાં ન્યુનત્તમ અવાજ મેળવવા માં આવે છે. અને તે વખતે A અને C બિંદુએ સ્થીતિમાન સમાન હોય છે. તેથી તટસ્થીકરણ સ્થિતિમાં આકૃતિ મુજબ ના બ્રિજ માટે,

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

પરંતુ આ પ્રકાર ના A.C. બ્રિજ મા કલા નો તફાવત પણ ઉદ્ભવતો હોય છે જેને તટસ્થીકરણ સ્થિતિ મા લાવવા માટે બ્રિજ ની દરેક શાખા ના અવબાધ ને સંગ્રાહક અથવા પ્રેરક ગૂંચળા વડે યોગ્ય સ્થિતિ મા લાવવામાં આવે છે. આ પ્રકારના બ્રિજ માં જ્યારે બધીજ શાખા નો અવબાધ સમાન હોય તેમજ પ્રવાહ ઉદભવ સ્થાન અને ડીટેકટર ની આવૃત્તિ સમાન હોય તે અવસ્થાએ બ્રિજ ખૂબજ સેન્સિટિવ હોય છે.

(2) પ્રેરક ગૂંચળા નો આત્મપ્રેરક આંક મેળવવા માટેના બ્રિજ

(A.C. Bridges for Measurement of Inductances, 17.6)

(1) મેક્સવેલ બ્રિજ: (Maxwell's Bridge):

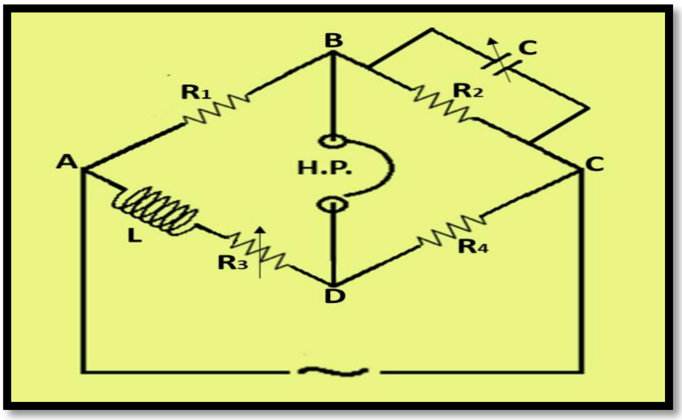


Fig: Maxwell's Bridge

મેક્સવેલ ના બ્રિજ માં આકૃતિ માં દર્શાવ્યા મુજબ પરીપથ નું જોડાણ કરવામાં આવે છે.

બ્રિજમાં પ્રવાહની તટસ્થીકરણ સ્થિતિ મેળવવા માટે સંગ્રાહક નાં મૂલ્યમાં ફેરફાર કરવામાં આવે છે તેથી સંગ્રાહક ચલિત દર્શાવેલ છે આમ સંગ્રાહક નાં મૂલ્યમાં ફેરફાર કરી હેડફોન માં લઘુત્તમ અવાજ સંભળાય તે રીતે તેનું મૂલ્ય ગોઠવવામાં આવે છે અને તે પરથી પ્રેરક ગૂંચળા નું પ્રેરકત્વ જાણીતા મૂલ્યના અવરોધ અને સંગ્રાહક ને સાપેક્ષ મેળવી શકાય છે. તેથી તટસ્થીકરણ સ્થિતિમાં આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

પરંતુ અહી, $Z_1 = R_1$

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{R_2} + j\omega C$$

$$Z_3 = R_3 + j\omega L$$

$$Z_4 = R_4$$

તેથી, $R_1\left(\frac{1}{R_2}+j\omega C\right)=\frac{R_3+j\omega L}{R_4}$

ઉપરના સમીકરણ ના બંને બાજુના વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગને સરખાવતાં

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_4}\dots\dots\dots eqn\,(1) \quad \text{અને} \quad R_1\omega C=\frac{\omega L}{R_4}$$

$$\therefore \quad L=CR_1R_4$$

સમી.(૧) અને (૨) એ મેક્સવેલ બ્રિજ ની તટસ્થીકરણ સ્થિતિ દર્શાવે છે. અને સમી.(૨) ને સંતોષવા માટે C નું મૂલ્ય બદલવામાં આવેછે.

તેથી સૌપ્રથમ બ્રિજનો ઉપયોગ કરવા માટે $\frac{R_1}{R_2}$ ના ગુણોત્તર ને યોગ્ય મૂલ્ય એ ગોઠવવામાં આવે છે અને R_3 ને બદલતા જઈ હેડફોનમાં ન્યુનત્તમ અવાજ મેળવવામાં આવે છે તેથી આ સ્થિતિમાં B અને D બિંદુઓ પાસેના સ્થિતિમાન નું મૂલ્ય સમાન થશે.

હવે કેપેસીટર C ના મૂલ્યમાં ફેરફાર કરી શક્ય તેટલો ન્યુનત્તમ અવાજ મેળવવામાં આવે છે અને આ રીતે કળા માટે પણ તટસ્થીકરણ સ્થિતિ મેળવી શકાય છે.

આરીતે વારાફરતી અવરોધ R_3 અને C ના મૂલ્યો બદલતા જઈ પ્રયોગ નું પુનરાવર્તન કરવામાં આવે છે. તેમ છતાં આ પ્રયોગ માં નિશ્ચિત તટસ્થીકરણ સ્થિતિ ક્યારેય પણ મેળવી શકાતી નથી કારણ કે પરીપથ પોતે પણ સંગ્રાહક ની જેમ વર્તાતો હોય છે.

હેડફોન માં જે ન્યુનત્તમ અવાજ સંભળાય છે તેને સંપૂર્ણ દૂર કરી ન શકવા નું એક કારણ એ પણ છે કે બ્રિજ ની જુદી જુદી શાખા ના ઘટકો દ્વારા ઉદભવતા ચુંબકીય ક્ષેત્ર ની એક બીજા પર અન્યોન્ય પ્રેરક અસર થાય છે. તેથી આ પ્રયોગ માં લાંબા વાયરો વાપરવા જોઈએ નહિ. ઉપરાંત દરેક ઘટકો વચ્ચે યોગ્ય અંતર જાળવવું વધારે હિતાવહ છે.

(2) એન્ડરસન બ્રિજ: (Anderson's Bridge):

ગૂંચળા ના આત્મપ્રેરકત્વ નું ચોક્કસ મૂલ્ય શોધવા માટે એન્ડરસન બ્રિજ સૌથી ઉત્તમ બ્રિજ છે. તેની રચના નીચેની આકૃતિ માં દર્શાવેલ છે.

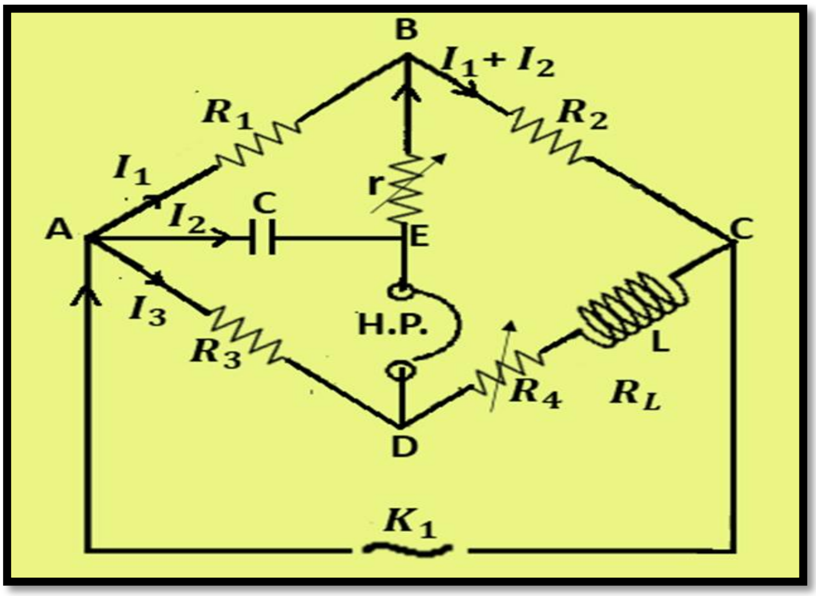


Fig: Anderson's Bridge

સૌપ્રથમ કળ K_1 દબાવી અને D.C. વિદ્યુત ઉદ્ભવ સ્થાન અને ગેલ્વેનોમીટર વચ્ચે તટસ્થીકરણ સ્થિતિ મેળવવામાં આવે છે એ માટે પરીપથ ની ચારેય શાખાના અવરોધ નું મૂલ્ય એડજેસ્ટ કરી અને તટસ્થીકરણ સ્થિતિ મેળવી શકાય છે. અને તેથી તટસ્થિકરણ અવસ્થામાં

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4 + R_L} \quad \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(1)$$

ત્યારબાદ A.C. ઉદ્ભવસ્થાન અને હેડફોન જોડી અને અવરોધ વડે પ્રેરકીય તટસ્થિકરણ અવસ્થા મેળવવામાં આવે છે.જ્યારે હેડફોન માં પ્રવાહ નું મૂલ્ય શૂન્ય થશે એટલે કે તેમાં સંભળાતો અવાજ બંધ થઈ જશે ત્યારે બ્રિજ તટસ્થિકરણ અવસ્થામાં હશે અને તેથી Aઅને B બિંદુઓ વચ્ચેનો વીજસ્થિતિમાન નો તફાવત એ બિંદુ A અને D વચ્ચેના વીજસ્થિતિમાન ના તફાવત જેટલો જ થશે તેથી,

$$\frac{I_2}{j\omega C} = I_3 R_3 \quad \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(2)$$

અને તેથી તટસ્થિકરણ અવસ્થામાં ABC વચ્ચેનો વીજસ્થિતિમાન નો તફાવત અને ADC વચ્ચેના વીજસ્થિતિમાન ના તફાવત જેટલો જ થવાથી કીરચોફ ના બીજા નિયમ મુજબ,

$$I_1R_1 + (I_1 + I_2)R_2 = I_3(R_3 + R_4 + R_L + j\omega L)$$

અથવા $$I_1(R_1 + R_2) + I_2R_2 = I_3(R_3 + R_4 + R_L + j\omega L) \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(3)$$

જ્યાં R_L એ પ્રેરક ગૂંચળા નો અવરોધ છે.

હવે મેશ- AEBA માં કોઈ વીજચાલક બળ આવેલ ન હોવાથી કિરચોફ ના બીજા નિયમ મુજબ

$$I_2 \frac{1}{j\omega C} + r = I_1R_1 \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(4)$$

સમી. (૨) પરથી I_3 ની કિંમત સમી. (3) માં મૂકતાં

$$I_1(R_1 + R_2) + I_2R_2 = \frac{I_2}{j\omega CR_3}(R_3 + R_4 + R_L + j\omega L)$$

અથવા $$I_1(R_1 + R_2) = \frac{I_2(R_3 + R_4 + R_L + j\omega L)}{j\omega CR_3} - I_2R_2 \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(5)$$

હવે સમી.(૪) મુજબ I_1 ની કિંમત સમી. (૫) માં મૂકતાં,

$$\frac{I_2}{R_1}\left(\frac{1}{j\omega C} + r\right)(R_1 + R_2) = I_2\left(\frac{R_3 + R_4 + R_L + j\omega L}{j\omega CR_3} - R_2\right)$$

અથવા

$$\frac{1}{R_1}(R_1 + R_2)\left(\frac{1}{j\omega C} + r\right) = \frac{R_3 + R_4 + R_L + j\omega L}{j\omega CR_3} - R_2 \_\_\_ eq^{n.}(6)$$

હવે સમી.(૬) ના વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગ સરખાવતાં

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) r = \frac{L}{CR_3} - R_2$$

અથવા $$L = CR_3\left[\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) r + R_2\right] \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(7)$$

અને $$\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{1}{\omega C} = \frac{R_3 + R_4 + R_L}{\omega CR_3}$$

અથવા $$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4 + R_L}{R_3} \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(8)$$

હવે સમી. (૮) ને સમી. (૧) સાથે સરખાવતાં કહી શકાય કે સમી. (૮) એ બ્રીજની D.C. પ્રવાહ માટેની તટસ્થીકરણ ની શરત દર્શાવે છે. જ્યારે સમી.(૭) એ A.C. પ્રવાહ માટેની તટસ્થીકરણ ની શરત

દર્શાવે છે. અને પ્રેરકિય તટસ્થીકરણ અવસ્થા અને ને ગોઠવી મેળવી શકાય છે. જો આપણે $R_1 = R_2$ ગોઠવીએ તો સમી.(૭) અને (૮) નીચે મુજબ થશે.

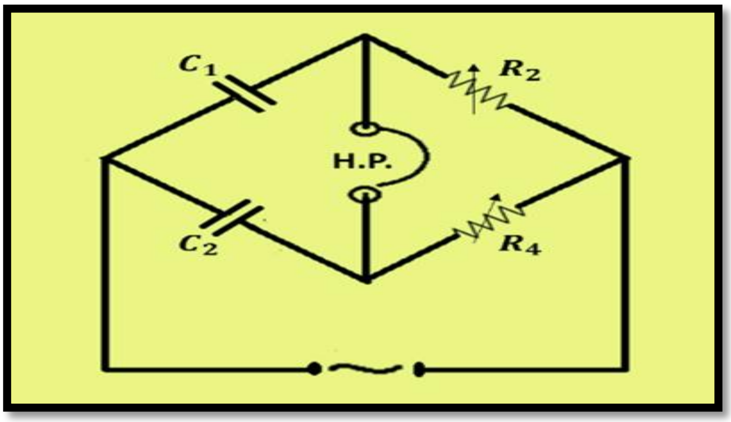
$$L = CR_3[R_2 + 2r] \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(9)$$

અને $$R_L = R_3 - R_4 \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(10)$$

અને તેથી ઉપર મુજબ ના સમી.(૯) અને (૧૦) પરથી બાકીના ઘટકોની જ્ઞાત કિંમતો પરથી અને. શોધી શકાય.

❖ સંગ્રાહક ની સંગ્રાહકતા મેળવવા માટેના પ્રત્યાવર્તી પ્રવાહ ના બ્રીજો (A.C. Bridges for the Measurement of Capacitance, 17.7)

(1) ડી' સોટી નો પ્રત્યાવર્તી પ્રવાહ બ્રિજ (De Sauty's A.C. Bridge)



આ બ્રિજ માં કોઈક જ્ઞાત અચળ મૂલ્યના સંગ્રાહકની સાપેક્ષ અજ્ઞાત મૂલ્યના સંગ્રાહકની સંગ્રાહકતા શોધવામાં આવે છે તે માટે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ બંને સંગ્રાહકો અને જેના આત્મપ્રેરણ અંક નું મૂલ્ય શૂન્ય હોય તેવા બે અવરોધો બ્રિજ પરીપથ માં જોડવામાં આવે છે સામાન્ય રીતે તેમાં એક

અવરોધ નું મૂલ્ય નિશ્ચિત રાખી અને તેની સાપેક્ષ બીજાઓનું મૂલ્ય બદલતા જઈ અને તટસ્થીકરણ અવસ્થા મેળવવામાં આવે છે.

તેથી તટસ્થીકરણ સ્થિતિ માટે,

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

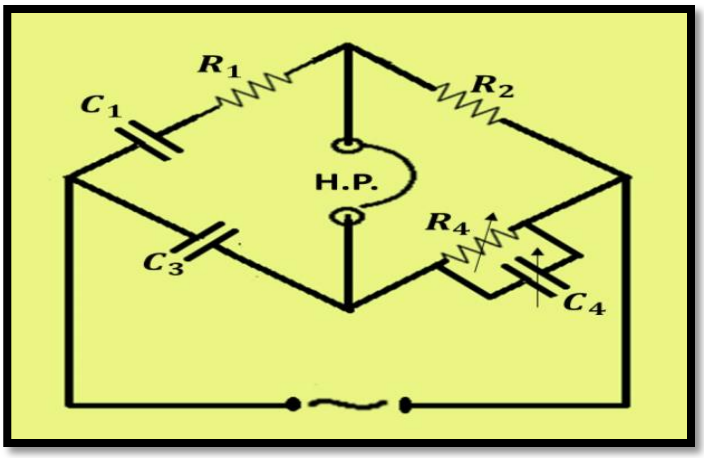
$$\therefore \quad \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_2} = \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{R_4} \qquad \therefore \quad \frac{1}{R_2 C_1} = \frac{1}{R_4 C_2}$$

$$\therefore \quad \frac{C_2}{C_1} = \frac{R_2}{R_4} \quad \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(1)$$

$$\therefore \quad C_2 = C_1 \frac{R_2}{R_4} \quad \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(2)$$

આરીતે ઉપરના સમીકરણ (૨) મુજબ અજ્ઞાત સંગ્રાહક ની સંગ્રાહકતા મેળવી શકાય છે. ઉપરાંત સમી.(૧) દ્વારા બે સંગ્રાહકો ની સરખામણી કરી શકાય છે.

(2) શેરિંગ બ્રિજ (Schering Bridge)



શેરિંગ બ્રિજનો ઉપયોગ ખૂબ જ નાના મૂલ્યના સંગ્રાહકની સંગ્રાહકતા એકદમ ચોક્કસ પણે મેળવવા માટે થાય છે. તદ્દુપરાંત કોઈપણ મૂલ્યના સંગ્રાહકની સંગ્રાહકતા શોધવા થાય છે. તે માટે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ પરિપથ જોડવામાં આવે છે અને જે સંગ્રાહકની સંગ્રાહકતા શોધવી હોય તેને C_1 તરીકે લેવામાં આવે છે આ બ્રિજને અવરોધ R_4 ના મૂલ્યમાં અને સંગ્રાહક C_4 ના મૂલ્યમાં વારાફરતી ફેરફાર કરી તટસ્થિકરણ સ્થિતિમાં લાવી શકાય છે. તેથી તટસ્થિકરણ સ્થિતિમાં,

$$\frac{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}{R_2} = \frac{\frac{1}{j\omega C_3}}{Z_4}$$

જ્યાં,
$$\frac{1}{Z_4} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_4}} = \frac{1}{R_4} + j\omega C_4$$

તેથી,
$$\frac{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}{R_2} = \frac{1}{j\omega C_3}\left(\frac{1}{R_4} + j\omega C_4\right)$$

અથવા $$R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = -\frac{R_2}{j\omega C_3 R_4} + \frac{R_2 C_4}{C_3}$$

ઉપરના સમીકરણના વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગ સરખાવતાં

$$R_1 = R_2 \frac{C_4}{C_1} \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(1)$$

અને $$\frac{1}{C_1} = \frac{R_2}{C_3 R_4}$$

અથવા $$C_1 = \frac{R_4}{R_2} C_3 \_\_\_\_\_\_ eq^{n.}(2)$$

ઉપરના સમી.(૨) દ્વારા C_1 નું મૂલ્ય મેળવી શકાય છે. અને સમી.(૧) દ્વારા અસરકારક અવરોધ R_1 નું મૂલ્ય મેળવી શકાય છે.