B.Sc. Sem - 3 Dr. N. I. Patel.

CC CH -301

Unit- 1 , Wave Mechenics

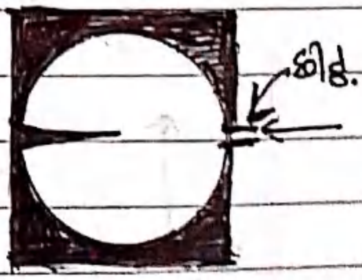
Black Body Radiation

કાળા પદાર્થનું વિકિરણ.

કોઈપણ ગરમ પદાર્થમાંથી વિકિરણોનું જે થતું ઉત્સર્જન એ પદાર્થોના કણોના કંપનોને આભારી હોય છે. નીચા તાપમાને $\lambda = 800$ nm થી વધુ એટલે કે ઓછી ν અને E ધરાવતા વિકિરણોનું ઉત્સર્જન થાય છે. જે IR (પાર રક્ત) વિભાગના હોય છે. જેમ જેમ તાપમાન વધારવામાં આવે તેમ ઓછી λ અને વધુ ν ધરાવતા વિકિરણોનું ઉત્સર્જન થતું હોય છે.

આથી કોઈ કાળા પદાર્થને ગરમ કરતાં પ્રથમ લાલ, પીળો અને વાદળી રંગો દેખાય છે. આમ જુદા જુદા તાપમાને વિવિધ λ તરંગલંબાઈ ધરાવતા વિકિરણોનું ઉત્સર્જન થાય છે. ઉત્સર્જિત થતા વિકિરણોની માત્રા (દળ) મહત્તમ હોય તો તે પદાર્થને સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ કહે છે. આમ પદાર્થ ઉપર પડતા બધા જ વિકિરણોનું શોષણ કરે. તો તે પદાર્થને સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ કહે છે. વ્યવહારમાં સંપૂર્ણ કાળો પદાર્થ પ્રાપ્ય નથી, પરંતુ પ્રાયોગિક અવલોકનો નોંધવા માટે તેની રચના નીચે મુજબ કરવામાં આવી.

- અંદરની સપાટી સંપૂર્ણ કાળી બનાવેલ પાત્રના ગોળામાં ખૂબ જ નાનું છીદ્ર રાખવામાં આવે છે કે જેમાંથી વિકિરણો આપાત થઈ શકાય.



- ગોળાની અંદર વિકિરણો પરાવર્તન અનુભવી અંદરથી બહાર ન નીકળે તેવી રચના કરવામાં આવે છે.

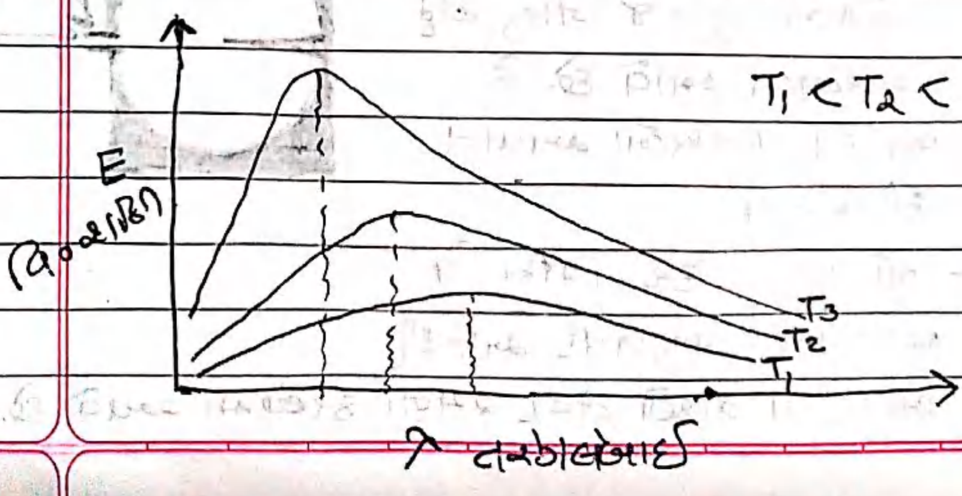
- ગોળાની અંદર વિકિરણોનો મહત્તમ ભાગ 98% નુ શોષણ થાય છે,
- ગોળાનુ છીદ્ર ખૂબ જ નાનુ હોવાથી વિકિરણો બહાર ફેકાતા નથી.
- વિકિરણોનુ સંપૂર્ણ શોષણ થયા પછી ગોળાને ગરમ કરતાં તેમાંથી વિકિરણોનુ ઉત્સર્જન થાય છે. જુદા જુદા તાપમાને જુદી જુદી λ ધરાવતા વિકિરણો ઉત્સર્જીત થાય છે. આ વિકિરણોને કાળા પદાર્થનુ વિકિરણ કહે છે.

લુમર અને પ્રિંગ્શાઇમે ઉત્સર્જીત થતા વિકિરણો માટે અવલોકનો નોંધ્યા જે નીચે મુજબ છે.

(1) ઉત્સર્જીત થતા વિકિરણોની માત્રા એ શોષણ પામેલા વિકિરણોની માત્રા જેટલી હોય છે.

(2) જેમ જેમ તાપમાન વધારવામાં આવે તેમ ઉત્સર્જીત પામતા વિકિરણોની માત્રા વધે છે.
ચોક્કસ તાપમાને એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ ઉત્સર્જીત થતા વિકિરણોની માત્રા એટલે કે તિવ્રતા (I) સમાન હોય છે. તાપમાન વધતાં તિવ્રતા પણ વધે છે. જે પદાર્થના બંધારણ ઉપર આધારીત નથી.

(3) જુદી જુદા તાપમાને જુદી જુદી λ ધરાવતા વિકિરણોનુ ઉત્સર્જન થાય છે.



— નીચા તાપમાને ઓછી શક્તિ ધરાવતા જુદી જુદી λ ધરાવતા વિકિરણોનું ઉત્સર્જન થાય છે.

— તાપમાન વધતાં વધુ E ધરાવતા વિવિધ λ ધરાવતા વિકિરણોનું ઉત્સર્જન થાય છે.

— વધુ તાપમાને ઓછી λ ધરાવતા, વધું શક્તિ ધરાવતા વિકિરણનું ઉત્સર્જન થાય છે.

— કોઈક્સ તાપમાને જુદી જુદી ~~શક્તિ ધસ~~ λ ધરાવતા બધાજ વિકિરણોની શક્તિ એ આલેખના ક્ષેત્રફળ (A) ના ચતુર્થઘાત જેટલી હોય છે.

$$E \propto A^4$$

$$E = \sigma A^4$$

σ - સ્ટીફન બોલ્ટ્ઝમાન અચળાંક.

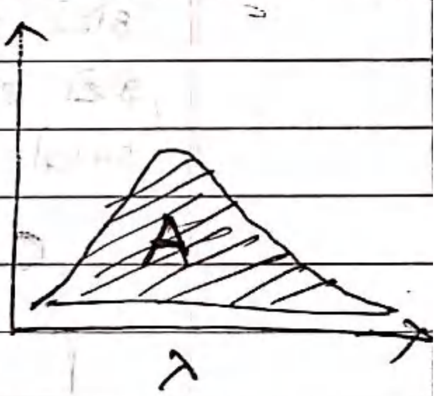


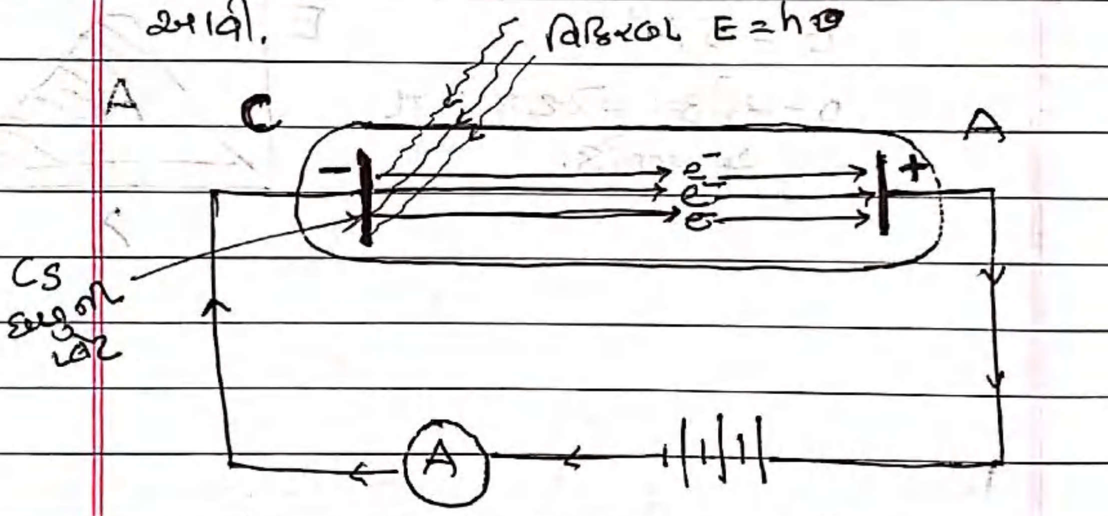
Photo electric effect

ફોટો ઈલેક્ટ્રીક અસર.

પ્લાન્કના ક્વોન્ટમ સિદ્ધાંત પરથી આઈન્સ્ટાઈને આ અસર સમજાવી.

જ્યારે કોઈ પણ ધાતુ સપાટી ઉપર વિકિરણ આપાત કરવામાં આવે ત્યારે ધાતુ સપાટી માંથી ઈલેક્ટ્રોનનું ઉત્સર્જન થાય છે. આ અસરને ફોટો ઈલે. અસર કહે છે.

ધાતુ સપાટી ઉપરથી બહાર ફેંકાતા ઈલેક્ટ્રોનને ફોટો ઈલેક્ટ્રોન કહે છે. આ અસર સમજવા ફોટો ઈલે. સેલની રચના નીચે મુજબ કરવામાં આવી.



આ સેલમાં સંપૂર્ણ શૂન્યાવકાશ ધરાવતી કાચની નળીમાં કેથોડ (−) અને એનોડ (+) ફીટ રાખવામાં આવ્યા જેને બેટરી તથા એમિટર સાથે જોડવામાં આવે છે.

કેથોડ તરીકે ઝડપથી ઈલે. ઉત્સર્જિત કરી શકે તેવી Cs (સીઝીયમ) જેવી ધાતુઓ

કે જેનો આયનીકરણ પોટેન્શિયલ ($\Delta_i H$) ખૂબ જ ઓછો હોય તેવી ધાતુઓને પસંદ કરવામાં આવે છે. ખૂબ જ ઓછી ધાતુઓ જ વધુ λ ધરાવતા અને ઓછી ν (અથવા E) ધરાવતા વિકિરણો આઘાત થતા ઇલેક્ટ્રોનનું ઉત્સર્જન કરી શકે છે. મોટાભાગની ધાતુઓ માટે UV (વધુ E.) ધરાવતા વિકિરણોથી જ ઇલે.નુ ઉત્સર્જન કરી શકાય છે.

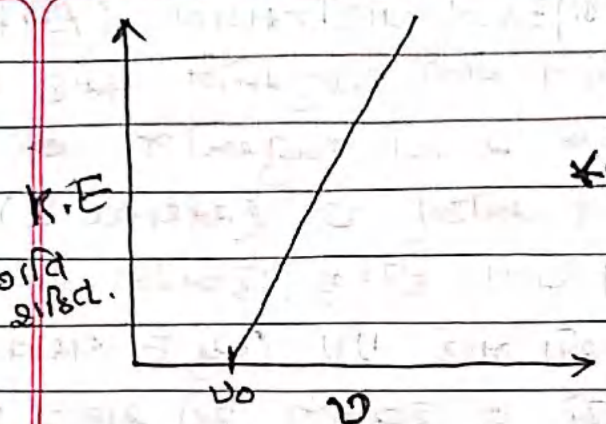
- કોઈ ચોક્કસ ધાતુ માટે ચોક્કસ ν ધરાવતા વિકિરણો આઘાત કરવામાં આવે તો જ ઇલેક્ટ્રોનનુ ઉત્સર્જન થાય છે. તેનાથી ઓછી આવૃત્તિ ધરાવતા વિકિરણો ઇલેક્ટ્રોનનુ ઉત્સર્જન કરી શકતા નથી. ભલે ને પ્રકાશની તિવ્રતા (I) વધારવામાં આવે અને ઘણા સમય સુધી વિકિરણ આઘાત કરવામાં આવે.

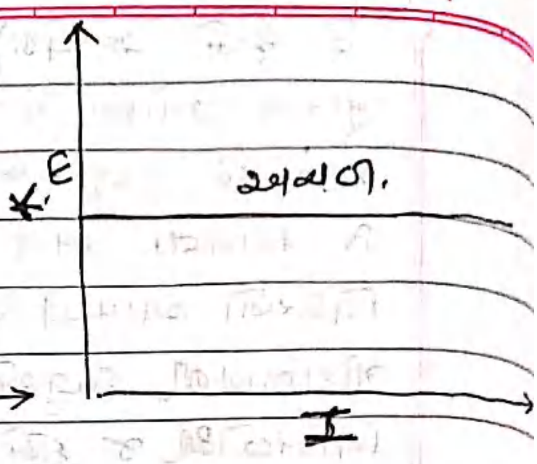
આમ ધાતુઓ માટે ઓછામાં ઓછી ν_0 આવૃત્તિ કરતાં વધુ આવૃત્તિ ધરાવતા વિકિરણો આઘાત કરવામાં આવે તો જ ઇલે.નુ ઉત્સર્જન થાય છે. આ ν_0 ને થ્રેશોલ્ડ, પ્રારંભિક અથવા દેહલી કે ક્રિટીકલ આવૃત્તિ કહે છે. જેનુ મૂલ્ય જુદા જુદા પદાર્થ માટે જુદુ જુદુ હોય છે.

$\nu_0 < \nu$ $\quad$ $E = h\nu$.

$E_0 = h\nu_0$ — ફોટો ઇલેક્ટ્રીક કાર્યવિધેય
થ્રેશોલ્ડ ઊર્જા.

- જેમ જેમ ν_0 કરતાં વધુ આવૃત્તિ ધરાવતા વિકિરણો ધાતુ સપાટી ઉપર આઘાત થાય છે. તેમ ઇલે.નો વેગ (V) એટલે કે ગતિશક્તિ વધે છે. પરંતુ પ્રકાશની તિવ્રતા I વધારવા છતાં ગતિશક્તિમાં ફરક પડતો નથી ~~માત્ર~~ માત્ર ઉત્સર્જિત થતા ઇલે.ની સંખ્યા વધે છે.





આમ કોઈપણ પદાર્થમાંથી ઇલે. નુ ઉત્સર્જન કરવા માટે ઓછામાં ઓછી ν_0 આવૃત્તી ધરાવતા વિકિરણની જરૂર પડે છે. આ વિકિરણની શક્તિ પરમાણુના કેન્દ્રની સાથે આકર્ષણ પામેલા ઇલેક્ટ્રોન ને આકર્ષણ બળ થી દૂર કરવા માટે વપરાય છે. આ આવૃત્તી ν_0 કરતાં વધુ આવૃત્તી ધરાવતા વિકિરણો આપાત કરતાં ઇલેક્ટ્રોન ગતિશક્તિ પ્રાપ્ત કરે છે. આમ. વિકિરણની કુલ શક્તિ

વિકિરણની કુલશક્તિ = { કેન્દ્રના આ. બળથી ઇલે. ને દૂર કરવા વપરાતી શક્તિ OR કાર્યવિધેય } + { ગતિશક્તિ }

કુલ શક્તિ = થ્રેશહોલ્ડ E_0 + K.E

$$E = E_0 + K.E$$

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 = h(\nu - \nu_0) \quad \text{--- (1)}$$

જે આઇન્સ્ટાઇને આપેલુ વિકિરણની કણ પ્રકૃતિ સમજાવવુ માની છે. જેમાં h અને ν_0 અચળ હોવાથી $K.E \propto \nu$ છે.

ઉપરના સમીકરણનો ઉપયોગ કરી મીલીકને જુદી જુદી ધાતુઓ માટે h નુ મૂલ્ય આપ્યુ છે. પ્લાન્કના h ના મૂલ્યને અનુમોદન છે.

મીલીકન $h = 6.57 \times 10^{-34}$ Js

પ્લાન્ક $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js.

Compton Effect (કોમ્પટન અસર)

વિકિરણના કણ સ્વભાવ (ક્વોન્ટમ સિદ્ધાંત) ને આધારે ક્ષ-કિરણ વિખેરણ (Scattering) સિદ્ધાંત સમજી શકાય છે. ક્ષ-કિરણ વિખેરણનો પ્રાચીન સિદ્ધાંત અનુસાર

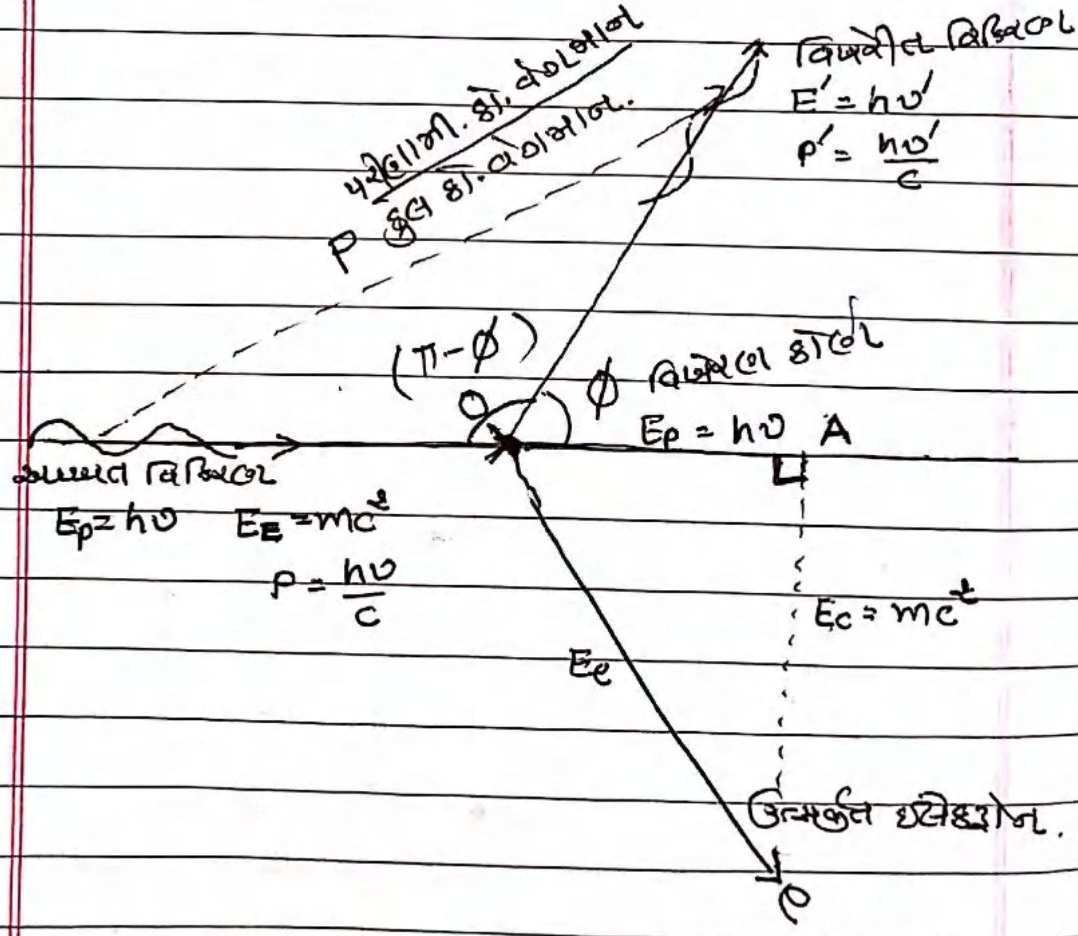
(૧) વિખેરણ પામતા X-કિરણની λ' અને આપાત વિકિરણની λ સમાન હોય છે. $(\lambda' = \lambda)$

(૨) વિખેરણ અચળાંક બધાજ વિખેરીત વિકિરણો માટે સમાન $(\phi = 0.2)$ હોય છે.

⇒ કોમ્પટન સિદ્ધાંતને આધારે.

(૧) $\lambda' > \lambda$ (૨) $\lambda \propto \phi$.

જે નીચે મુજબ સાબિત કરી શકાય.



જ્યારે કોઈ એકમ λ $(E = \frac{hc}{\lambda})$ ધરાવતું વિકિરણ (ફોટોન) કોઈ ધાતુના ઈલે. સાથે અથડાય છે ત્યારે ઈલે. ગતિઉર્જા પ્રાપ્ત કરી ઉત્સર્જિત થાય છે, જ્યારે ઓછાવાળી શક્તિ ધરાવતા વિકિરણનું વિખેરણ થાય છે. જે વિખેરણ પામતા વિકિરણની λ' આપાત વિકિરણની λ કરતાં વધુ હોય છે. અને E' ઓછી હોય છે. આ તરંગલંબાઈમાં થતા ફેરફારને કોમ્પટન અસર કહે છે. કોમ્પટન સિદ્ધાંતને આધારે $\lambda' > \lambda$ $(E' < E)$ અને $\phi \propto \lambda$ નીચે મુજબ સાબિત કરી શકાય.

(1) આપાત અને વિખેરણ પામતા વિકિરણનું રેખીય વેગમાન.

પ્લાન્ક $E_p = h\nu$ આઈન્સ્ટાઈન $E_E = mc^2$

$$h\nu = mc^2$$

$$h\nu = mc \cdot c \qquad p = m \cdot c$$

$$\boxed{h\nu = p \cdot c}$$

$$\boxed{p = \frac{h\nu}{c}}$$ આપાત વિકિરણનું વેગમાન

$$\boxed{p' = \frac{h\nu'}{c}}$$ વિખેરણ પામતા વિ. નું રેખીય વેગમાન

(2) ઉત્સર્જિત થતા ઈલે. ની ગતિશક્તિ E_e

$\Delta\ OAe$ માટે.

$$Oe^2 = Ae^2 + OA^2$$

$$E_e^2 = E_p^2 + E_E^2$$

$$E_e^2 = (h^2\nu^2 + m^2c^4)$$

$$\boxed{E_e = (h^2\nu^2 + m^2c^4)^{1/2}}$$

(3) Energy Conservation (શક્તિ સંરક્ષણ) ના નિયમને આધારે.

પ્રારંભિક કુલ શક્તિ = પછીની કુલ શક્તિ.

$$E_p + E_E = E' + E_e$$

$$h\upsilon + mc^2 = h\upsilon' + (h^2\upsilon^2 + m^2c^4)^{1/2}$$

$$h(\upsilon-\upsilon') + mc^2 = (h^2\upsilon^2 + m^2c^4)^{1/2}$$

બંન્ને બાજુ વર્ગ લેતાં

$$h^2(\upsilon-\upsilon')^2 + \cancel{m^2c^4} + 2h(\upsilon-\upsilon')mc^2 = h^2\upsilon^2 + \cancel{m^2c^4}$$

$h\upsilon = p.c$ ને આધારે.

$$h^2(\upsilon-\upsilon')^2 + 2h(\upsilon-\upsilon')mc^2 = p^2c^2$$

h^2 વડે ભાગતાં

$$\boxed{(\upsilon-\upsilon')^2 + \frac{2(\upsilon-\upsilon')mc^2}{h} = \frac{p^2c^2}{h^2}} \quad \text{——} (1)$$

(4) આપાત અને વિખેરણ પામતા વિકિરણનું. પછીનું કુલ રેખીય વેગમાન સદિશને આધારે.

$$P = p^2 + p'^2 + 2pp'\cos(\pi-\phi)$$

પરંતુ $\cos(\pi-\phi) = -\cos\phi$

$$P^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\phi$$

$$P^2 = \frac{h^2\upsilon^2}{c^2} + \frac{h^2\upsilon'^2}{c^2} - 2\frac{h\upsilon}{c}\frac{h\upsilon'}{c}\cos\phi$$

$$\boxed{\frac{P^2c^2}{h^2} = \upsilon^2 + \upsilon'^2 - 2\upsilon\upsilon'\cos\phi} \quad \text{——} (2)$$

સમી. (1) અને (2) સરખાવતાં

$$(\nu-\nu')^2 + \frac{2mc^2}{h}(\nu-\nu') = \nu^2+\nu'^2-2\nu\nu'\cos\phi$$

$$\cancel{\nu^2}+\cancel{\nu'^2}-2\nu\nu' + \frac{2mc^2}{h}(\nu-\nu') = \cancel{\nu^2}+\cancel{\nu'^2}-2\nu\nu'\cos\phi$$

$$\frac{\cancel{2}mc^2}{h}(\nu-\nu') = \cancel{2}\nu\nu'(1-\cos\phi)$$

$$\frac{c\nu - c\nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi)$$

$$\frac{c}{\nu'}-\frac{c}{\nu} = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi) \qquad \boxed{\lambda = c/\nu}$$

$$\boxed{\lambda'-\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi)} \quad \text{———} \quad (3)$$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi)$$

OR

$$1-\cos\phi = 2\sin^2\frac{\phi}{2}$$

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\phi}{2}} \quad \text{———} \quad (3)$$

જે વિખેરણ પામતા વિકિરણનું કોમ્પ્ટન સમી. છે.

(1) સમીકરણમાં $\lambda'-\lambda$ = ધન મૂલ્ય મળે છે.
આથી $\lambda'>\lambda$ અને $E'<E$ $\qquad E = \frac{hc}{\lambda}$

(2) h/mc અચળ છે. આથી $\Delta\lambda$ એ ϕ વિખેરણ કોણ ઉપર આધારીત છે.

$\phi = 0$ વિકિરણ વિખેરણ ન પામતુ હોય તો
$\cos 0 = 1$ આથી

$$\Delta\lambda = 0 \quad \therefore \quad \lambda'-\lambda=0$$

$\therefore$ $\lambda'=\lambda$ મળે છે.

(3) $\frac{h}{mc}$ અચળાંક છે. જેને કોમ્પ્ટન તરંગ લંબાઈ λ_c કહે છે.

$\therefore \Delta\lambda = \lambda_c(1-\cos\phi)$

$$\lambda_c = \frac{h}{mc}$$

$$= \frac{6.62 \times 10^{-34}\ Js}{9.1 \times 10^{-31}\ kg \times 3 \times 10^{8}\ ms^{-1}}$$

$$= 0.2425 \times 10^{-11}\ m$$

$$= 2.425 \times 10^{-12}\ m.$$

$1\ m = 10^{10}\ A^\circ$

$$= 2.425 \times 10^{-12} \times 10^{10}\ A^\circ$$

$$= 2.425 \times 10^{-2}\ A^\circ$$

$$\lambda_c = 0.02425\ A^\circ$$

The Postulates of Q.M.

ક્વોન્ટમ યંત્રશાસ્ત્રની ઉપધારણાઓ.

ક્વોન્ટમ મેકેનિક્સ અને વેવ મેકેનિક્સમાં શ્રોડિંજર સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને ઇલેક્ટ્રોન ની ભૌતિક રાશિઓ મેળવી શકાય છે. પરંતુ શ્રોડિંજર સમીકરણને આધારે માત્ર એક ઇલેક્ટ્રોન પ્રણાલી માટેની ભૌતિક રાશિઓ શોધી શકાય છે, એમ ઇલે. માટેની ભૌતિક રાશિઓ શોધવા ક્વોન્ટમ મેકેનિક્સમાં કેટલીક ધારણાઓનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ ધારણાઓને સાબિત કરી શકાતી નથી કે મેળવી શકાતી નથી પરંતુ તેમને સ્વીકારી લેવામાં આવે છે.

ઉપધારણા -(I)

પ્રણાલીની સ્થિતિ / અવસ્થાને φ દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે. જે પ્રણાલીની સંપૂર્ણ માહિતીની રજૂઆત કરે છે. જેને પ્રણાલી માટેનું અવસ્થા વિધેય કહે છે.

$\varphi_{(x)}$, $\varphi(t)$, $\varphi_{(x,y,z)}$ $\varphi_{(x,t)}$ વગેરે.

ઉપધારણા - (II)

Q. M. માં પ્રણાલીની દરેક ભૌતિક રાશિએ શોધવા એકેક પ્રકારના કારક (operator) નો ઉપયોગ થાય છે. માપનીય ભૌતિક રાશિએ શોધવા એકેક ઓપરેટર હોય છે. સ્થાન, રેખીય વેગમાન જેવા ઓપરેટરનો ઉપયોગ કરીને અન્ય ભૌતિક રાશિએ માટેના ઓપરેટર મેળવી શકાય છે.

(i) સ્થાન માટે ઓપરેટર

$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

(ii) રેખીય વેગમાન માટે ઓપરેટર

$\hat{p_x} = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$ $\hat{p_y} = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}$

$\hat{p_z} = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}$

કુલ $\hat{p} = \frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$\hat{p} = \frac{h}{2\pi i} \nabla$

(iii) કોણીય વેગમાન માટે ઓપરેટર

કોણીયવેગમાન = રેખીય વેગમાન x અંતર

$L = p \times r.$

$\hat{L_x} = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}(r)$ $\hat{L_y} = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}(r)$

$\hat{L_z} = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z} r.$

$\hat{L} = \frac{h}{2\pi i} \cdot r \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$\hat{L} = \frac{h}{2\pi i} r \nabla$

(iv) ગતિશક્તિ માટેનો કારક.

$K = \frac{1}{2} m v^2$

$K = \frac{m^2 v^2}{2m}$ (m વડે ગુણી/ભાગતાં)

$K = \frac{p^2}{2m}$

$$\hat{K} = \frac{\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \nabla^2}{2m}$$

$$\hat{K} = \frac{1}{2m} \cdot \frac{h^2}{4\pi^2 (i)^2} \nabla^2 \qquad (i^2 = -1)$$

$$\hat{K} = \frac{-h^2}{8\pi^2 m} \nabla^2$$

(V) કુલ શક્તિ માટેનો કારક.

કુલશક્તિ = ગતિશક્તિ + સ્થિતિશક્તિ

$$E = K + V$$

$$H, = \frac{-h^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 + V$$

હેમિલ્ટોનિયન ઓપરેટર.

ઉપધારણા – (III)

ભૌતિક રાશિઓના ચોક્કસ ઓપરેટરનો ઉપયોગ કરી આયગન સમી. દ્વારા પ્રણાલી માટે ભૌતિક રાશીનું મૂલ્ય શોધી શકાય છે.

$\hat{A}\phi = \lambda\phi$. આયગન સમી. છે.

λ = આયગન મૂલ્ય (ભૌતિક રાશીનું મૂલ્ય)

ϕ = આયગન વિધેય જે પ્રણાલીનું વિધેય હોય છે.

$\hat{P}_x \phi = P_x \phi$.

$H\phi = E\phi$. — શ્રોડિન્જર સમી.

સાબિત કરો કે શ્રોડિંજર સમીકરણ એ એક આયગન સમી. (રચિત) આકૃતિ છે.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi=-\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi$$

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2\psi=E\psi-V\psi$$

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2\psi+V\psi=E\psi$$

$$\left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2+V\right]\psi=E\psi$$

$$H\psi=E\psi$$

ઓપરેટર — આઇગનમૂલ્ય અચળ.

ઉદાહરણ–(IV)

ધુળાળોની અવલોકીત ભૌતિક રાશીના એક જ ધુળાળી માટે ઘણા બધા માપનો કરી શકાય છે, જેને નીચે મુજબ સરેરાશ મૂલ્ય થી રજૂ કરી શકાય

$$H\psi=E\psi$$

$$E=\frac{\psi H\psi}{\psi\psi} \qquad [-\infty,+\infty]$$

સરેરાશ $E=\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi H\psi\, d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\psi\, d\tau}$ અવકાશનુ સૂચન કરે છે.

ઉપધારણા :- (V)

ક્વોન્ટમ યંત્રશાસ્ત્રમાં પ્રણાલની અવસ્થા નક્કી કરતા વિધેયને શ્રોડિંજર તરંગ સમી. થી દર્શાવાય છે. જેમાં સમય ભિન્ન આધારીત શ્રોડિંજર સમી. નો ઉપયોગ થાય છે.

સમય આધારીત શ્રોડિંજર તરંગ સમી.

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial \phi_{(r,t)}}{\partial t} = H\phi_{(r,t)}$$

જ્યાં $\phi_{(r,t)} = \phi_{(x,y,z,t)}$

સમય ભિન્ન આધારીત શ્રોડિંજર તરંગ સમી.

$$\frac{\partial^2 \phi_r}{\partial r^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\phi_r = 0$$

જ્યાં $r = x, y, z.$

Operator (કારક)

એકદમ ગાણિતિક સંજ્ઞા કે જે એક વિધેયનું બીજા વિધેયમાં રૂપાંતર કરે તેને કારક કહે છે.

(કારક)(વિધેય) = નવું વિધેય

$$\hat{A} f(x) = f'(x)$$

કારક એ ~~કોઈ~~ ગાણિતિક સંજ્ઞા છે. જે વિધેય ઉપર ઓપરેટ થાય છે. અને નવું વિધેય પ્રાપ્ત થાય છે. કારકને કોઈ જ મૂલ્ય હોતું નથી.

અહીં કારકનો વિધેય સાથેનો ગુણાકાર નથી. પરંતુ કારક એ વિધેય ઉપર ઓપરેટ થાય છે. જેને ઓપરેન્ડ કહે છે.

ઘણા બધા કારકો હોય છે. જુદા જુદા કારકોને એક વિધેય ઉપર ઓપરેટ કરતાં નીચે મુજબ નવા વિધેયો પ્રાપ્ત થાય છે. જેમકે...

કારકોનુ બિજગણિત :
Algebra of Operator.

(1) કારકોનો સરવાળો/બાદબાકી.

$$(\hat{A} \pm \hat{B}) f(x) = \hat{A} f(x) \pm \hat{B} f(x)$$

ઉદા.

$$\left(\sqrt{\ } + \frac{\partial}{\partial x}\right) x^2 = \sqrt{x^2} + \frac{\partial}{\partial x} x^2$$
$$= x + 2x$$
$$= 3x.$$

(2) કારકોનો ગુણાકાર.

એક કરતાં વધુ કારકો ક્રમિક રીતે વિધેય ઉપર નીચે મુજબ ઓપરેટ કરવામાં આવે છે.

$$\overleftarrow{\hat{A}\hat{B}} f(x) = \hat{A} [\hat{B} f(x)]$$
$$= \hat{A} f'(x)$$
$$= f''(x).$$

કારકોનો ગુણાકારનો ક્રમ જમણેથી ડાબે તરફ હોય છે.

Ex.: $\hat{A} = x$ વડે ગુણતાં $\hat{B} = \partial/\partial x$ $f(x) = \sin x$. હોય તો $\hat{A}\hat{B}f(x)$ અને $\hat{B}\hat{A}f(x)$ મેળવો.

$$\hat{A}\hat{B}f(x) = x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \sin x$$
$$= x \cdot (\cos x)$$
$$= x \cos x$$

$$\hat{B}\hat{A}f(x) = \frac{\partial}{\partial x} (\underline{x \cdot \sin x})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} x \cdot \sin x.$$
$$= x \cdot \cos x + \sin x.$$

કારકોના પ્રકાર :-

(1) રેખીય કારક (Linear Operator)

બે વિધેયોના સરવાળા ઉપર કોઈ એક કારકને ઓપરેટ કરતાં અને બંન્ને વિધેયો ઉપર તે જ કારકને અલગ-અલગ ઓપરેટ કરતાં મળતુ પરીણામ સમાન હોય તો તે ઓપરેટર રેખીય ઓપરેટર છે.

$$\hat{A}\left[f(x)+g(x)\right] = \hat{A}f(x) + \hat{A}g(x)$$

Ex: $f(x) = x^2$ $g(x) = 2x^2$ માટે $\hat{A} = \sqrt{\ }$ રેખીય છે કે નહિ, ચકાસો.

$$\hat{A}\left[f(x)+g(x)\right] = \hat{A}f(x) + \hat{A}g(x)$$

$$\sqrt{x^2 + 2x^2} = \sqrt{x^2} + \sqrt{2x^2}$$

$$\sqrt{3x^2} \neq x + \sqrt{2}\,x$$

$$\sqrt{3}\,x \neq x + \sqrt{2}\,x$$

$\sqrt{\ }$ એ રેખીય કારક નથી.

Ex-2 : $\hat{A} = \partial/\partial x$ ઉપરના વિધેયો માટે રેખીય કારક છે,

L.H.S $\quad \partial/\partial x\left[x^2 + 2x^2\right]$

$$= \partial/\partial x\ 3x^2$$

$$= 6x$$

$R.H.S = \hat{A} f(x) + \hat{A} g(x)$

$= \frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial x} 2x^2$

$= 2x + 4x$

$= 6x$

$L.H.S = R.H.S.$ માટે $\frac{\partial}{\partial x}$ રેખીય છે.

આજ રીતે $\int (\ \ ) dx$ પણ રેખીય કારક છે.

(2) Commutator Operator

ક્રમ નિરોધક કારક.

કોઈ એક વિધેય ઉપર બે કારકોનો ક્રમ બદલી ઓપરેટ કરતાં મળતુ પરીણામ સમાન મળે છે. તો તે બે કારકો એકબિજાને કોમ્યુટ છે તેમ કહેવાય. અને મળતા નવા ઓપરેટરને કોમ્યુટેટર કારક કહે છે.

$\hat{A}\hat{B} f(x) = \hat{B}\hat{A} f(x)$ $\hat{A}$ અને $\hat{B}$ કોમ્યુટ છે.

$\hat{A}\hat{B} f(x) - \hat{B}\hat{A} f(x) = 0$

$[\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}] f(x) = 0$

$[\hat{A}, \hat{B}] f(x) = 0$

$[\hat{A}, \hat{B}]$ કોમ્યુટેટર ઓપરેટર છે.

જો $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$ અથવા $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ મળે તો $\hat{A}$ અને $\hat{B}$ એકબિજાને કોમ્યુટ છે અને $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$, $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ તો $\hat{A}, \hat{B}$ એકબિજાને કોમ્યુટ નથી.

Ex-1 :- $\hat{A} = \partial/\partial x$ $\hat{B} = \partial^2/\partial x^2$ કારકો $f(x) = \sin x$ માટે કોમ્યુટ છે કે નહિ ચકાસો.

$$[\hat{A}, \hat{B}] f(x) = [\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}] f(x)$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right] \sin x$$
$$= \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right] \sin x$$
$$= 0 \sin x$$
$$= 0$$

$[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ હોવાથી $\hat{A}$ અને $\hat{B}$ એકબીજાને કોમ્યુટ છે.

Ex-2 :-

$\hat{A} = \partial/\partial x$, $\hat{B} = x$ અને $f(x) = \sin x$ હોય તો $[A, B]$ શોધો.

$$[\hat{A}, \hat{B}] f(x) = [\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}] f(x)$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial x} x - x\frac{\partial}{\partial x}\right] \sin x$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} x \cdot \sin x - x\frac{\partial}{\partial x}\sin x$$
$$= \cancel{x \cdot \cos x} + \sin x - \cancel{x \cos x}$$
$$= 1 \sin x$$

$\therefore [\hat{A}, \hat{B}] = 1$ કોમ્યુટેટર ઓપરેટર $\hat{A}, \hat{B}$ કોમ્યુટ નથી

$[\hat{A}, \hat{B}] = 1$ આવે તો તેને યુનિક (એકમ) ઓપરેટર કહે છે.

Ex-3 : $\hat{A} = 3x^2$ $\hat{B} = \partial/\partial x$

અને $f(x) = \sin x$ હોય તો $[\hat{A}, \hat{B}]$ શોધો

$\Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] f(x) = \hat{A}\hat{B} f(x) - \hat{B}\hat{A} f(x)$

$= 3x^2 \frac{\partial}{\partial x} \sin x - \frac{\partial}{\partial x} 3x^2 \cdot \sin x$

$= 3x^2 \cos x - (3x^2 \cos x + 6x \sin x)$

$= 3x^2 \cos x - 3x^2 \cos x - 6x \sin x$

$= -6x \sin x$.

$\therefore [\hat{A}, \hat{B}] = -6x$. કોમ્યુટેટર ઓપરેટર છે.

$\hat{A}$ અને $\hat{B}$ કોમ્યુટ નથી. કારણ કે $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$

(૩) લાપ્લાસિયન કારક (અદિશ કારક)

$\phi(x)$, $f(y)$, $\partial/\partial x$ વગેરે એક ચલ કારકો છે. એક કરતાં વધુ ચલ દર્શાવતા કારકો · $\partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial z$ દર્શાવી શકાય

જે બહુચલ વિકલનીય કારક છે.
જેનો ક્વોન્ટમ મીકેનિક્સમાં ઉપયોગ થાય છે.
જે લાપ્લાસિયન કારક તરીકે ઓળખાય છે.

અદિશ કારક. $\nabla = \vec{i}\, \partial/\partial x + \vec{j}\, \partial/\partial y + \vec{k}\, \partial/\partial z$

OR

$\nabla\phi = \partial\phi/\partial x + \partial\phi/\partial y + \partial\phi/\partial z$

$\therefore \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

(4) હર્માશીયન કારક

બે જુદા જુદા વિધેયો માટે કોઈ એક કારક નીચેની શરતનુ પાલન કરે તો તે કારક હર્માશિયન કારક છે.

$$\int \varphi_1 \hat{A} \varphi_2 \, d\tau = \int \varphi_2 \hat{A} \varphi_1 \, d\tau$$

Ex: $\rightarrow$ $\varphi_1 = \sin x$, $\varphi_2 = \cos x$

$\hat{A} = \partial^2/\partial x^2$ હોય તો આ કારક $\hat{A}$ હર્મિશીયન છે.

$$\int \sin x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos x \, dx = \int \cos x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin x \, dx$$

$$\int \sin x \frac{\partial}{\partial x} (-\sin x) \, dx = \int \cos x \frac{\partial}{\partial x} \cos x \, dx$$

$$\int \sin x (-\cos x) \, dx = \int \cos x (-\sin x) \, dx$$

$$-\int \sin x \cdot \cos x \, dx = -\int \sin x \cdot \cos x \, dx$$

$$L.H.S = R.H.S$$

$\hat{A} = \partial^2/\partial x^2$ હર્માશીયન છે.

Ex-2 $\varphi_1 = \sin x$ અને $\varphi_2 = \cos x$ માટે સાબિત કરો કે મોમેન્ટમ ઓપરેટર હર્માશીયન છે.

(5) Hamiltonian Operator.

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2 + V.$$

V = સ્થિતિશક્તિ (Potential Energy)

$V = \sum \pm \frac{q_1 q_2}{r}$ જ્યાં q_1 અને q_2 બે કેન્દ્રોના વિજભાર

r = બે કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર છે.

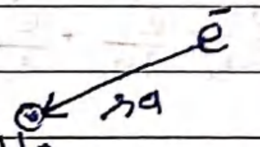
(+) અપાકર્ષણ બળ સૂચવે છે.

(−) આકર્ષણ બળ સૂચવે છે.

V = પરમાણુઓના આકર્ષણ અપાકર્ષણ બળોનો સરવાળો.

Ex:→ નીચેના પરમાણુ / આયનો / ~~માટે~~ અણુ માટે હેમિલ્ટોનિયન ઓપરેટર મેળવો.

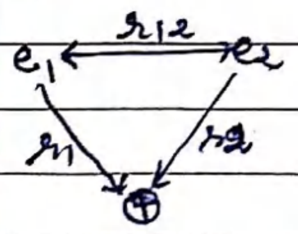
(1) H - પરમાણુ. H: $1s^1$



$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{r_a}$$

(Z=1)

(2) He Z=2 $1s^2$

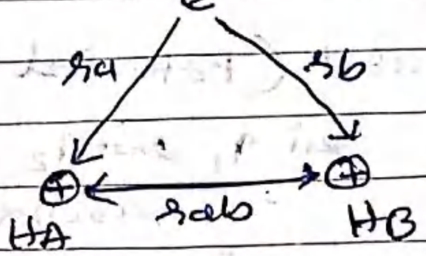


$$\cancel{H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla_1^2 - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}}$$

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}$$

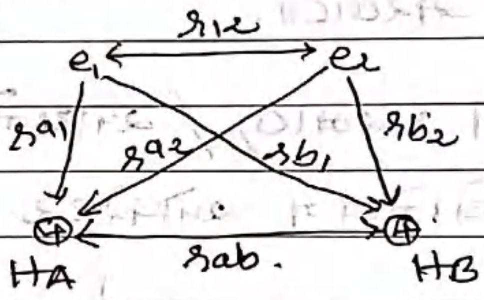
③ H_2^+ $\quad H^+ + H^{\cdot} \longrightarrow H_2^+$

$1s^0 \quad 1s^1$



$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}(\nabla_1^2) - \frac{e^2}{r_a} - \frac{e^2}{r_b} + \frac{e^2}{r_{ab}}.$$

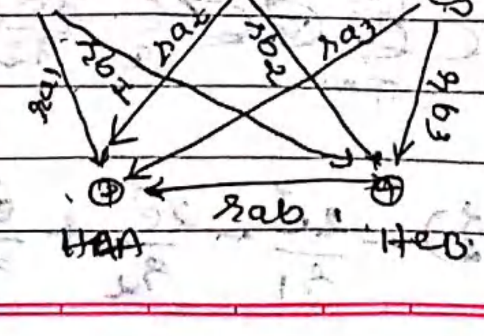
③ H_2 – अणु



$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{e^2}{r_{a_1}} - \frac{e^2}{r_{b_2}} - \frac{e^2}{r_{a_2}} - \frac{e^2}{r_{b_1}} + \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{ab}}$$

④ He_2^+ $\quad He + He^+ \rightarrow He_2^+$

$1s^2 \quad 1s^1$



Eigen Value & eigen equation

કોઈ ઓપરેટરને કોઈ વિધેય સાથે ઓપરેટ કરતાં તેનુ તેજ વિધેય કોઈ અચળ મૂલ્ય સાથે પરત મળે તો તે અચળ મૂલ્યને આયગનમૂલ્ય અને વિધેયને આયગન વિધેય કહે છે.

આયગન સમીકરણ

$$\hat{A}\varphi = \lambda \varphi$$

λ = આયગનમૂલ્ય
φ = આયગનવિધેય.

Ex:- ① $\hat{A} = \partial/\partial x$ માટે $\varphi = e^{-2x}$ આયગન વિધેય છે.? આયગન મૂલ્ય શોધો.

$$\hat{A}\varphi = \frac{\partial}{\partial x} e^{-2x}$$

$$= -2 \cdot e^{-2x}$$

$$= \lambda \varphi$$

$\lambda = -2$, φ, આયગન વિધેય છે.

② $\partial^2/\partial x^2$ કારક માટે નીચેના વિધેયો આયગન વિધેય છે કે નહિ તે જણાવો. અને આયગનમૂલ્ય શોધો.

(i) $\varphi = \sin ax$

$$\therefore = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin ax$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} a \cos ax$$

$$= -a \cdot a \sin ax$$

$$= -a^2 \sin ax$$

$\lambda = -a^2$

(ii) $\varphi = x^2$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 = \frac{\partial}{\partial x} 2x$$

$$= 2$$

φ આયગન વિધેય

(iii) $\varphi = \cos 2x$

$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \cos 2x$

$= \frac{\partial}{\partial x} (-\sin 2x)\, 2$

$= -2 \times 2 \cos 2x$

$= -4 \cos 2x$

આઈગન વિધેય છે. $\lambda = -4$

(3) હર્મિશિયન કારક માટે આઈગન આઈગન મૂલ્ય વાસ્તવિક હોય છે. સાબિત કરો.

ધારોકે $\frac{\partial}{\partial x^2}$ કારક એ હર્મિશિયન છે.

(નોંધ: હર્મિશિયન કારકની વ્યાખ્યા જુઓ.)

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ કારક એ $\sin 4x$; $\cos 2x$, e^{-x} વિધેયો ઉપર આપરેટ થતાં. તેના તેજ વિધેયો પરત મળે છે. અને વાસ્તવિક આઈગન વેલ્યુ મળે છે. આથી કહી શકાય કે હર્મિશિયન કારકની આઈગન વેલ્યુ વાસ્તવિક (real) હોય છે.

(4) $\varphi = \sqrt{2/a} \sin \frac{n\pi}{a} x$ હોય તો E શોધો.

$H\cdot\varphi = E\varphi$ શ્રોડિંજર સમી. આઈગન સમી. છે.

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sqrt{2/a} \sin \frac{n\pi}{a}\cdot x\right) = E\varphi$$

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \cdot -\sqrt{2/a} \cdot \frac{n^2\pi^2}{a^2} \cdot \sin \frac{n\pi}{a} x = E\varphi$$

$$+\frac{h^2}{8\cancel{\pi^2} m} \frac{n^2\cancel{\pi^2}}{a^2} \cancel{\varphi} = E\cancel{\varphi}$$

$$\boxed{E = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}}$$

Free Particle System
મુક્ત કણ પ્રણાલી.

પરમાણુ કે અણુઓનો કદી મુક્ત હોતો નથી. કારણ. સ્થાનાંતરીય અને ભ્રમણ (ભ્રમણ) ગતિ કરે છે.

પરંતુ મુક્ત કણ સ્થાનાંતરીય રેખીય ગતિ કરતો હોય છે. ધારો કે કોઈ મુક્ત કણ x- દિશામાં સ્થાનાંતરીય ગતિ કરે છે તે માટેનું શ્રોડિન્જર તરંગ સમીકરણ નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\varphi = 0$$

કણ સતત ગતિમાન હોવાથી સ્થિતિ શક્તિ $V=0$

$$\therefore \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E\varphi = 0$$

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} E = k^2 \text{ ધારતાં} \quad \text{—— (1)}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k^2\varphi = 0$$ જે દ્વિવિકલીત સમી છે.

જેનો ઉકેલ (Solution) નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= A \sin kx + B \cos kx \\ &\text{OR} \\ \varphi &= A e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(1) ઉપરના સમી.ને આધારે પ્રણાલી માટે આયગન મૂલ્ય શોધી શકાય, પ્રણાલીનું રેખીય વેગમાન શોધતાં

$$\hat{P}_x \varphi = P_x \varphi \quad \text{આયગન સમી.}$$

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \varphi = P_x \varphi.$$

$$L.H.S = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\left(A\cdot e^{ikx} + B\cdot e^{-ikx}\right)$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\left(A\cdot e^{ikx}\cdot ik + B\cdot e^{-ikx}(-ik)\right)$$

$i^2 = -1$

$$= \frac{h}{2\pi i}\pm ik\left(A\cdot e^{ikx} + B\cdot e^{-ikx}\right)$$

$$= \pm\frac{kh}{2\pi}\varphi$$

$$= P_x\cdot\varphi$$

$\therefore$ $\boxed{P_x = \pm\frac{kh}{2\pi}}$ આયગન મૂલ્ય (રેખીય વેગમાન)

$k^2 = \frac{8\pi^2 mE}{h^2}$ — સમી-(1) ને આધારે

$$\frac{k^2h^2}{4\pi^2} = 2mE$$

રેખીય વેગમાન P_x ની કિંમત મૂકતાં.

$$\frac{kh}{2\pi} = \pm\sqrt{2mE}$$

$$\boxed{P_x = \pm\sqrt{2mE}} \quad\text{—— (3)}$$

જે મુક્ત કણ માટેનું રેખીય વેગમાન છે.

(2) તરંગ લંબાઈ $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{P_x} = \frac{h}{\pm\sqrt{2mE}}$

$P_x^2 = 2mE$

(3) કુલ શક્તિ $E = \frac{P_x^2}{2m} = \frac{m^2V_x^2}{2m} = \frac{mV_x^2}{2}$

કુલ શક્તિ : $\boxed{E = \frac{1}{2}mV_x^2}$

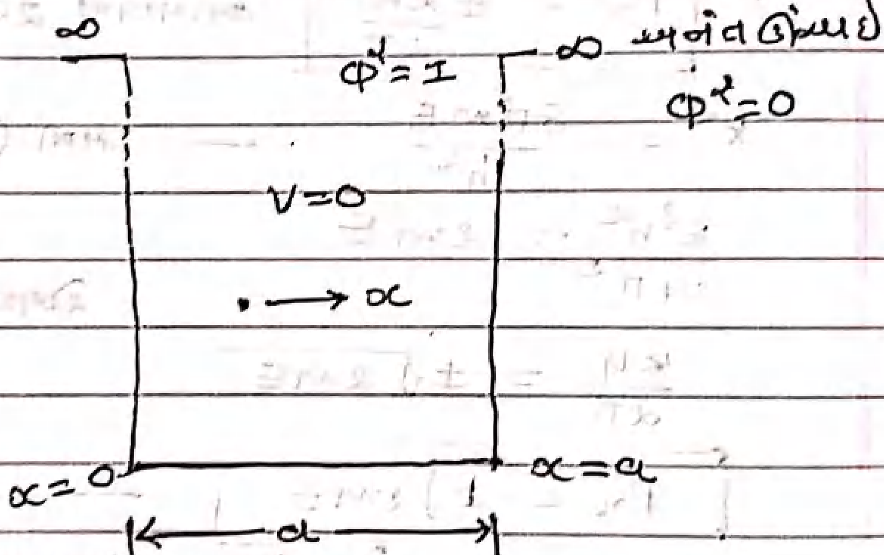
Particle in one dimensional box.

એક પરિમાણીય પેટીમાંનો કણ.

Que! એક પરિમાણીય પેટીમાં રહેલ કણ માટે તરંગ ફલન અને શક્તિ તારવો.

⇒ શ્રોડિન્જર સમી.નો ઉપયોગ કરી આદર્શ કાલ્પનિક પ્રણાલી માટે તરંગફલન અને શક્તિ તારવી શકાય છે.

કાલ્પનિક એક પરિમાણીય પેટી.



(1) 'a' લંબાઈ ધરાવતી અનંત ઊંચાઈ વાળી પેટીમાં m દ્રવ્યમાન ધરાવતો કણ રહેલો છે. કણ પેટીની બહાર જતો નથી. પેટીની બહાર કણ શોધવાની સંભાવના $\psi^2 = 0$ છે.

(2) કણ x દિશામાં V વેગથી સતત ગતિમાન છે. આથી સ્થિતિ શક્તિ $V = 0$ થાય.

(3) કણ પેટીની દિવાલોને અથડાય છે. આથી શક્તિનો વ્યય થતો નથી કુલ શક્તિ E એ અચળ રહે છે.

કણ x દિશામાં ગતિમાન હોવાથી x દિશા માટેનું શ્રોડિન્જર તરંગ સમીકરણ

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)\phi = 0$$

પરંતુ $V = 0$ હોવાથી

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E\phi) = 0$$

આ વિકલન સમીકરણનો ઉકેલ નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$\phi = A \sin\frac{2\pi x}{\lambda} + B\cos\frac{2\pi x}{\lambda} \quad \text{—— (1)}$$

⇒ પેટીમાં ગતિમાન કણ માટે જે સીમા શરતો લાગુ પડે છે.

(1) $x = 0$ (પેટીની દિવાલ આગળ) $\phi = 0$

(2) $x = a$ (") $\phi = 0$

આ બન્ને સીમા શરતોને સમી. (1) માં લાગુ કરતાં

સમી. (1) માં $x = 0$, $\phi = 0$ મૂકતાં

$$\phi = A\sin(0) + B\cos(0)$$

$$\sin(0) = 0$$
$$\cos(0) = 1$$

$$\therefore \boxed{B = 0}$$

આ કિંમત સમી. (1) માં મૂકતાં

$$\phi = A\sin\frac{2\pi x}{\lambda} \quad \text{—— (2)}$$

શરત (2) $x = a$, $\phi = 0$ મૂકતાં

$$0 = A\sin\frac{2\pi a}{\lambda} \quad \text{—— (3)}$$

સમી. ③ માં $A = 0$ OR $\sin\frac{2\pi a}{\lambda} = 0$ હોવું જોઈએ. જો $A = 0$ લેવામાં આવે તો આ કિંમત સમી. ② માં મૂકતાં $\varphi = 0$ મળે જે અવાસ્તવિક છે. આથી

$$A \neq 0$$

$\therefore \sin\frac{2\pi a}{\lambda} = 0$ હોવું જોઈએ.

$$\therefore \frac{2\pi a}{\lambda} = \sin^{-1}(0)$$

$\therefore \frac{2\pi a}{\lambda} = n\pi$ જ્યાં $(n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$\therefore \boxed{\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{a}}$$

આ કિંમત સમી. ② માં મૂકતાં

$$\boxed{\varphi = A \sin\frac{n\pi}{a}\cdot x} \text{ ——— } ④$$

જે 'a' લંબાઈની પેટીમાં રહેલા કણ કે x દિશામાં ગતિ કરતાં [illegible] કણ માટેનું તરંગ ફલન છે.

⇒ કુલ શક્તિ

શ્રોડિંજર સમી. $H\varphi = E\varphi$

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A\sin\frac{n\pi}{a}x\right) = E\varphi$$

$$\frac{-h^2}{8\pi^2 m}\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\cdot A\sin\frac{n\pi}{a}x = E\varphi$$

$$\frac{h^2}{8\cancel{\pi^2} m} \cdot \frac{n^2\cancel{\pi^2}}{a^2} \cancel{\phi} = E \cancel{\phi}$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}}$$ જ્યાં ($n = 1, 2, 3 \ldots$) , a = પેટીની લંબાઈ છે.